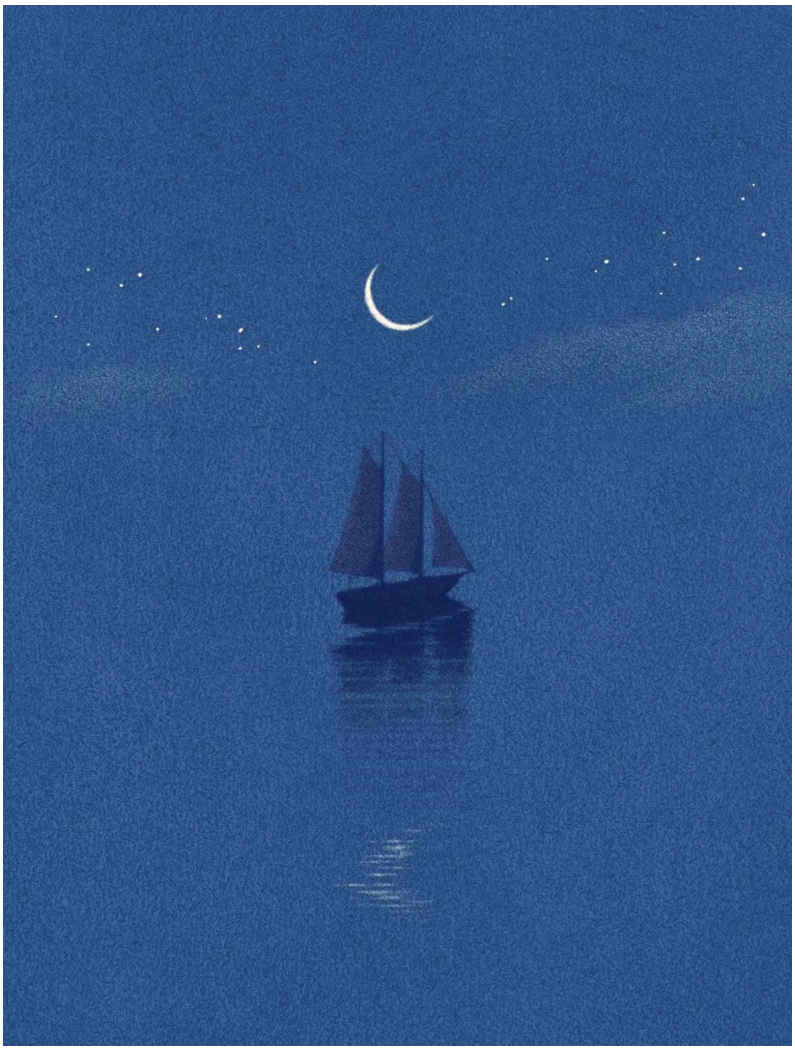
〈 수학 톺아보기, Look after sincerely! 〉

「 미적분 Ⅰ 심화☆ (For 단대 2S) 」

(01. 함수의 극한[학교 프린트 ⇒ 주요 킬러])



Voyage(2), Jungho Lee

박 지현 T

SNT × 대치동 최고열정 박지현T

단대부고 2S Class

수업 기본 안내 사항 (박지현T Class)



1. 수업에 필요한 자료, 실시간 링크는 **구글 클래스룸**에 가입하여 확인합니다.

   단대 1S 수업 코드 : **izdifmm (아이 제트 디 아이 에프 엠 엠)**

2. 숙제는 보통 화목에 60여문제가 부과되고, 목~ 화요일에는 90~ 110문제가 부과됩니다.
   숙제는 수업 당일 숙제 제출지에 제출하면 됩니다.
   (숙제 완성도는 시험 점수와 함께 부모님께 문자로 전송되고, 등급이 C이면 -1, D이면 -2점이 부과됨)

3. 매 수업간 실시간 수업과 녹화 수업이 함께 이뤄지며, 질병 등의 이유로 부득이 결석하는 경우에는 데스크나 조교(010-7516-4014)에게 연락하여 녹화 수업을 볼 수 있습니다. 학원 OBS본은 학생이 잘려있어 몰입감이 좋고, 고화질 녹화본은 깨끗한 화질로 시청 가능합니다. 두 영상은 스타일만 다르고 동일한 수업에 대한 두 가지 버전의 영상입니다.

4. 결석시 동영상 보강용 링크는 조교를 통해 개별 전달 됩니다.
   (어머님께 카톡 링크로, 학생에게 카톡 링크로 이중으로 보냄. 카톡 없는 경우 이메일을 조교에게 일러줄 것!)

모두를 위한 학생 품위 유지 관련

1. 수업에 등원하여 시험보기까지 **일체의 핸드폰 사용을 금지**합니다.
   (오면 데스크에 제출 하거나, 강의실 내부의 핸드폰 수거함에 넣어둠)
   -> 급히 필요한 경우는 데스크 유선 전화를 이용하거나, 선생님이나 조교 허락을 받아 잠시 사용 가능

2. 음료를 제외한 어떤 음식물도 강의실에 반입하지 않습니다.
   (음료도 1+1, 2+1 등 두 개 이상 가지고 들어오지 말 것!)

3. 유제 문항, 길잡이 문항, 시험 오답, 오답 노트 풀이 등 모든 학생 주도 공부 시간에는 돌아다니지 않고, 짝을 제외한 그 누구와도 이야기를 나누지 않습니다.
   (짝궁과도 사적 이야기는 금하고, 뒤에 사람이 안 들릴 정도로 낮은 톤으로 푸는 문제에 대해서만 의견 교류)

4. 시험기간 상의하여 답을 내거나 콴다를 보고 답을 내는 경우 벌점을 받고, **두 번째 적발 시 무관용 퇴원 조치**합니다.

5. 뒤의 입식 책상은 다른 친구를 배려하여 딱 한 텀 한 시간만 사용 후 자기 자리로 돌아옵니다.

6. 상·벌점 누적을 통해 평균 성적과 합산하여 매 정기 고사당 시상하며,
   1학기, 여름 학기, 2학기, 겨울 학기의 큰 시즌이 끝날 때 전반 제언의 근거로 활용합니다.

수학 톺아보기

『 미적분 Ⅰ 심화 』

- 함수의 극한

[2025년 고3 11월 공통 21번]

1. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<t) \\ f(x) & (x\geq t) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

조건

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 존재한다.

(나) $\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 음수가 되도록 하는 자연수 m의 집합은 $\left\{g(-1),\ -\frac{7}{2}g(1)\right\}$이다.

$g(-5)$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } g(-1)\neq -\frac{7}{2}g(1)\right)$

[2027년 고3 수능 예시문항 18번]

2. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)+g(8)$의 값은?

조건

(가) 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 모두 직선 $y=x$ 위의 서로 다른 두 점 A, B를 지난다.

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{(f(x)-x)(g(x)-x)}{x^3}$의 값과 $\lim_{x\to 0}\frac{(f(x)+x)(g(x)+x)}{x^3}$의 값이 존재한다.

① 64 ② 68 ③ 72
④ 76 ⑤ 80

[2025년 고3 9월 공통 13번]

3. 함수 $f(x)=x^2+6x+12$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 개수는?

조건

모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{x^2}{(f(x))^2-k(x+2)f(x)}$의 값이 존재한다.

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[2024년 고3 11월 공통 21번]

4. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수 a, b에 대하여 $f(1)$의 최댓값을 구하시오.

조건

모든 실수 α에 대하여 $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(2x+1)}{f(x)}$의 값이 존재한다.

[2023년 고3 7월 경찰대 공통 17번]

5. 두 실수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b+c+d$의 값은?

조건

(가) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(a-b)x^2+ax}-x\right)=c$ (c는 상수)

(나) $\lim_{x\to-\infty}\left(ax-b-\sqrt{-(b+1)x^2-4x}\right)=d$ (d는 상수)

① $-\frac{5}{2}$ ② -3 ③ $-\frac{7}{2}$

④ -4 ⑤ $-\frac{9}{2}$

[2019년 고3 11월 문과 14번]

6. 상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값은?

조건

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g(x)}{x^3}=2$

(나) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=-4$

① 4 ② 6 ③ 8

④ 10 ⑤ 12

[2026년 고3 6월 공통 11번]

7. 일차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$$

의 값이 $a=0$일 때 존재하고 $a=3$일 때 존재하지 않는다. $f(4)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

【2018년 6월학평 가형 30번(고2)】

8. 양의 실수 k와 함수 $f(x)=ax(x-b)$ (a, b는 자연수)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<b) \\ kf(x-b) & (x \geq b) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

조건

(가) $g(6)=-8$
(나) 방정식 $|g(x)|=b$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

실수 m에 대하여 직선 $y=mx-1$이 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $h(m)$이라 하자.
함수 $h(m)$에 대하여 $\lim_{m \to t-} h(m)+\lim_{m \to t+} h(m)=6$을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은 $p+q\sqrt{14}$이다. $12(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) (4점)

【2023년 교육청 고2공통 9월 20번】

9. 이차함수 $f(x)=(x-k)^2$ $(k>0)$이 있다. 양수 a에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 3) \\ kf(x-a) & (x>3) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

○ 조건 ○

(가) $\lim_{x \to 3} g(x)$가 존재한다.

(나) 함수 $y=g(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서만 만난다.

○ 보기 ○

ㄱ. $f(1)=1$이면 $g(2)=0$이다.

ㄴ. $g(k+a)<g(3)$

ㄷ. $(k-1)(k-2) \ge 0$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

【2020년 9월 학평 30번(고2)】

10. 이차함수 $f(x)=x^2+2x+2$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ |f(-x)-t| & (x \ge 0) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{3}$가 만나는 서로 다른 모든 점의 개수를 $h(t)$라 하자.

$$\lim_{t \to \alpha-} h(t) \neq \lim_{t \to \alpha+} h(t)$$

인 모든 실수 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, $\cdots$, α_m (m은 자연수)라 할 때, $\sum_{k=1}^{m} \{4\alpha_k \times h(\alpha_k)\}$의 값을 구하시오. [4점]

【2022년 교육청 고2공통 9월 29번】

11. 양수 m과 0이 아닌 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=\begin{cases}x^2+(a-1)x-a^2+2 & (x\le 2m)\\ -3x+4a & (x>2m)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}ax-a & (x\le m+1)\\ x-a+1 & (x>m+1)\end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

○ 조건 ○

(가) $\lim_{x\to\alpha-} f(x)\neq\lim_{x\to\alpha+} f(x)$, $\lim_{x\to\beta-} g(x)\neq\lim_{x\to\beta+} g(x)$인 실수 α, β가 존재한다.

(나) 모든 실수 k에 대하여 $\lim_{x\to k}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 존재한다.

$m+g(a^2)$의 값을 구하시오.

【2021년 교육청 고2공통 9월 30번】

12. 세 실수 $a(a\neq 0)$, b, k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+(2b-3)x+a^2-3 & (x<k)\\ -\frac{1}{3}ax^2+(b+5)x+a^2-1 & (x\ge k)\end{cases}$$

라 하자. 함수

$$g(x)=\lim_{t\to x+}\frac{|f(t)|}{f(t)}-\lim_{t\to x-}\frac{|f(t)|}{f(t)}$$

에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

○ 조건 ○

(가) 임의의 실수 α에 대하여 $\lim_{x\to\alpha} f(x)$가 존재한다.

(나) 두 함수 $y=g(x)$와 $y=-4\left|\log_2\frac{x}{2}\right|+2$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수는 5이다.

$k=p+q\sqrt{17}$일 때, $16(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 유리수이다.)

정답 찾기

1. [정답] 65
2. [정답] ②

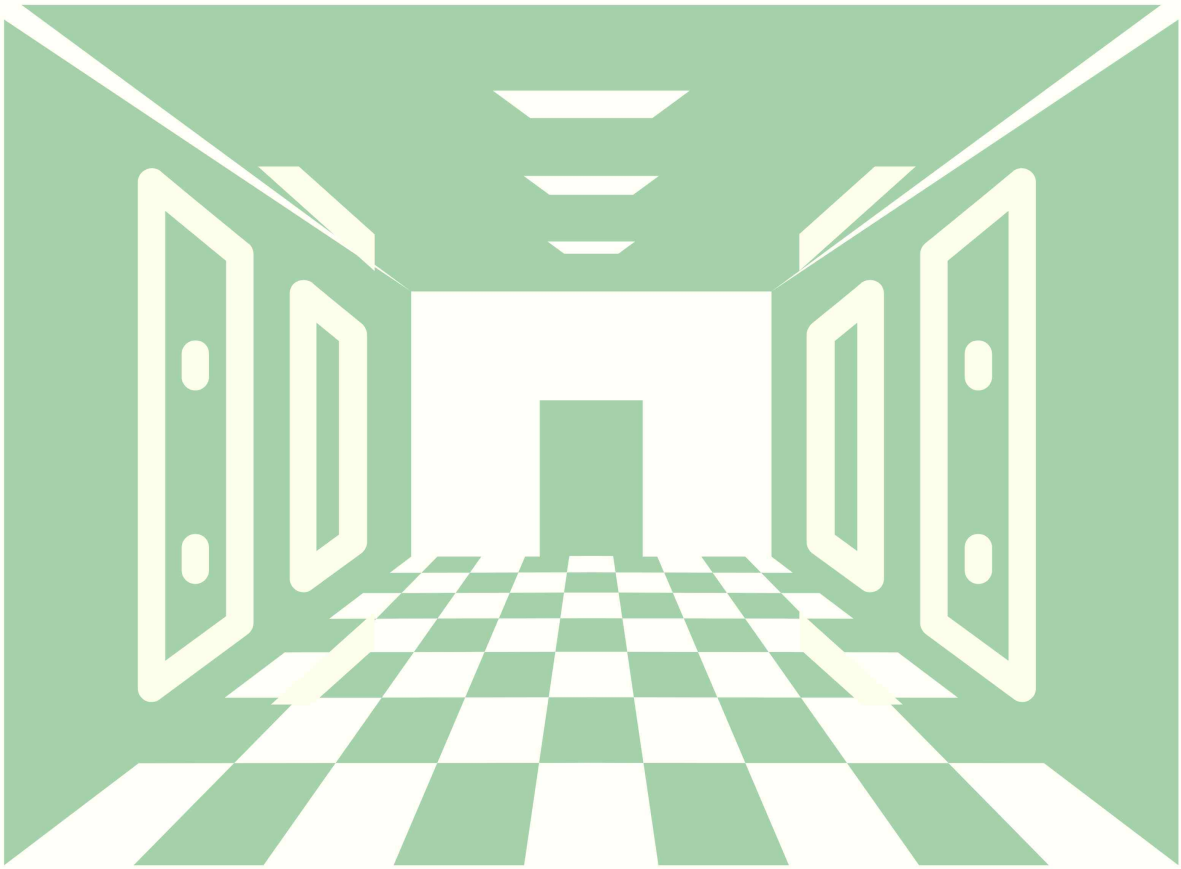
3. [정답] ④
4. [정답] 16

5. [정답] ③
6. [정답] ③

7. [정답] ①
8. [정답] 219

9. [정답] ②
10. [정답] **141**

11. [정답] 4
12. [정답] **28**



snt × 선생님 같은 강사, 박지현T

자유를 위한
공부

문의 SNT 수학과
02 508 0586

정답과 해설

1. [정답] 65

[해설]

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=t$에서도 연속이다. 즉,

$$\lim_{x\to t-} g(x)=\lim_{x\to t+} g(x)=g(t)$$

이어야 하고, $g(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<t)\\ f(x) & (x\geq t)\end{cases}$이므로

$$\lim_{x\to t-} g(x)=-f(t)$$

$$\lim_{x\to t+} g(x)=f(t)$$

$$g(t)=f(t)$$

에서 $\quad -f(t)=f(t) \quad \therefore\ f(t)=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

한편 조건 (가)에서 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 존재하므로 분모가 0이 되는 x의 값에 대하여도 극한값이 존재하여야 한다.

방정식 $x(x-2)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

즉, $a=0$, $a=2$일 때 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$에서 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$$\therefore\ g(0)=0,\ g(2)=0 \quad \cdots\cdots$$ ㉡

이때 $g(c)=0$ (c는 상수)이면

$$f(c)=0,\ -f(c)=0$$

즉, $g(c)=0$이면 $f(c)=0$이므로 ㉡에 의하여

$$f(0)=0 \text{ 그리고 } f(2)=0$$

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로

$$f(x)=kx(x-2)(x-\alpha)\ (k>0\text{이고, }\alpha\text{는 상수})$$

라 놓을 수 있고, ㉠에 의하여

$$t=0 \text{ 또는 } t=2 \text{ 또는 } t=\alpha$$

$$g(x)=\begin{cases}-kx(x-2)(x-\alpha) & (x<t)\\ kx(x-2)(x-\alpha) & (x\geq t)\end{cases} \quad \cdots\cdots$$ ㉢

$\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$에서 조건 (나)를 만족하는 자연수 m의 값을 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $m=1$일 때

$x\to 1+$이면 $x(x-2)<0$이므로 $-\frac{7}{2}g(1)$이 자연수이므로 $g(1)$은 음수이어야 한다. 따라서 $\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)}{x(x-2)}>0$이므로 조건 (나)에서 자연수 m은 1이 아니다.

(ⅱ) $m=2$일 때

$x\to 2+$이면 ㉡에서 $g(2)=0$이므로

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2+}\frac{1}{x}\times\frac{g(x)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{1}{x}\times\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

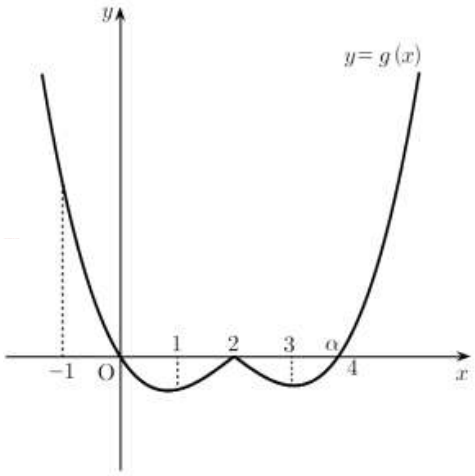
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}<0$$

이어야 한다.

(ⅲ) $m>2$일 때

$\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}<0$에서 $m(m-2)>0$이므로 $g(m)<0$이어야 한다. 이때 $g(m)<0$을 만족하는 자연수가 하나만 존재해야 하므로 $g(3)<0$이고 $g(4)\geq 0$이어야 한다.

이상에서 $g(-1)>0$이고 $g(1)<0$, $\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}<0$, $g(3)<0$, $g(4)\geq 0$을 만족하려면 $t=2$이어야 하고 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



따라서 ㉢에서 $3<\alpha\leq 4$이어야 하고 조건 (나)를 만족하는 자연수 m의 값은 2와 3이므로

$$\left\{g(-1),\ -\frac{7}{2}g(1)\right\}=\{2,\ 3\}$$

이다. 이때 함수 $g(x)$는 다음과 같고

$$g(x)=\begin{cases}-kx(x-2)(x-\alpha) & (x<2)\\ kx(x-2)(x-\alpha) & (x\geq 2)\end{cases}$$

조건 (나)에 의하여 함수 $g(x)$를 구하면

(ⅰ) $g(-1)=2$, $-\frac{7}{2}g(1)=3$일 때

$$3k(1+\alpha)=2,\ \frac{7}{2}k(\alpha-1)=3$$

에서 $\alpha=-8$이므로 조건을 만족하지 않는다.

(ⅱ) $g(-1)=3$, $-\frac{7}{2}g(1)=2$일 때

$$3k(1+\alpha)=3,\ \frac{7}{2}k(\alpha-1)=2$$

에서 $\quad \alpha=\frac{11}{3},\ k=\frac{3}{14}$

$$\therefore\ f(x)=\frac{3}{14}x(x-2)\left(x-\frac{11}{3}\right)$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)=\frac{3}{14}x(x-2)\left(x-\frac{11}{3}\right)$이고,

$$g(x)=\begin{cases} -\frac{3}{14}x(x-2)\left(x-\frac{11}{3}\right) & (x<2) \\ \frac{3}{14}x(x-2)\left(x-\frac{11}{3}\right) & (x\geq 2) \end{cases}$$

이므로 구하는 값은

$$\begin{aligned} g(-5)&=-f(-5) \\ &=-\frac{3}{14}\times(-5)\times(-7)\times\left(-\frac{26}{3}\right) \\ &=65 \end{aligned}$$

2. [정답] ②

[해설]

$F(x)=f(x)-x$, $G(x)=g(x)-x$라 하면 $F(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수, $G(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

조건 (가)에서 두 점 A, B의 x좌표를 u, v $(u\neq v)$라 하면 $f(u)=u$, $f(v)=v$, $g(u)=u$, $g(v)=v$이므로 u, v는 방정식 $F(x)=0$, $G(x)=0$의 공통인 두 근이다. 따라서

$$G(x)=(x-u)(x-v)$$
$$F(x)=(x-u)(x-v)(x-w) \ (w\text{는 상수})$$

조건 (나)에서 $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)G(x)}{x^3}$의 값이 존재하므로 다항식 $F(x)G(x)=(x-u)^2(x-v)^2(x-w)$는 x^3을 인수로 가져야 한다.

u, v가 모두 0이 아니면 x^3을 인수로 가질 수 없으므로 u, v 중 하나는 0이다. $u=0$이라 하면 $v\neq 0$이므로 $w=0$이어야 한다.

$v=r$ $(r\neq 0)$라 하면

$$G(x)=x(x-r),\ F(x)=x^2(x-r)$$

즉

$$f(x)=x^2(x-r)+x,\ g(x)=x(x-r)+x$$

이다. 이때

$$\begin{aligned} &\frac{\{f(x)+x\}\{g(x)+x\}}{x^3} \\ &=\frac{\{x^2(x-r)+2x\}\{x(x-r)+2x\}}{x^3} \\ &=\frac{\{x(x-r)+2\}(x-r+2)}{x} \end{aligned}$$

이므로 조건 (나)에서 $x\to 0$일 때 (분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0이어야 한다. 즉 $2(2-r)=0$에서 $r=2$이다.

따라서 $f(x)=x^2(x-2)+x$, $g(x)=x(x-2)+x$이므로

$$f(3)+g(8)=(9+3)+(48+8)=12+56=68$$

3. [정답] ④

[해설]

$f(x)=x^2+6x+12$이므로

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to a}\frac{x^2}{(f(x))^2-k(x+2)f(x)} \\ &=\lim_{x\to a}\frac{x^2}{f(x)\{f(x)-k(x+2)\}} \\ &=\lim_{x\to a}\frac{x^2}{(x^2+6x+12)\{x^2+(6-k)x+12-2k\}} \quad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

에서 임의의 실수 a에 대하여 극한값이 존재한다.

$x^2+6x+12=(x+3)^2+3$에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+6x+12>0$이므로 ㉠의 극한값이 존재하는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 이차방정식 $x^2+(6-k)x+12-2k=0$의 실근이 존재하지 않을 때

㉠의 분모가 0이 되는 값이 존재하지 않으므로 임의의 실수 a에 대하여 ㉠의 극한값이 존재한다.

이차방정식 $x^2+(6-k)x+12-2k=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(6-k)^2-4\times 1\times(12-2k)<0$$
$$k^2-4k-12<0,\qquad (k-6)(k+2)<0$$
$$\therefore\ -2<k<6$$

(ⅱ) 이차방정식 $x^2+(6-k)x+12-2k=0$의 실근이 0뿐일 때

$x^2+(6-k)x+12-2k=x^2$에서

$$k=6$$

이때, ㉠에서

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to a}\frac{x^2}{(x^2+6x+12)\{x^2+(6-k)x+12-2k\}} \\ &=\lim_{x\to a}\frac{x^2}{x^2(x^2+6x+12)} \\ &=\lim_{x\to a}\frac{1}{x^2+6x+12} \end{aligned}$$

이므로 임의의 실수 a에 대하여 극한값이 존재한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 k의 값의 범위는

$$-2<k\leq 6$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 k는 -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6의 8개다.

4. [정답] 16

[해설]

모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(2x+1)}{f(x)}$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to a}f(x)=0$일 때 $\lim_{x\to a}f(2x+1)=0$이어야 한다. ····· ㉠

즉, $f(a)=0$이면 $f(2a+1)=0$

이때 $a\neq 2a+1$이면 ㉠에 의하여

$$f(a)=0,\ f(2a+1)=0,\ f(4a+3)=0,\ f(8a+7)=0,\ \cdots$$

이 되어 방정식 $f(x)=0$이 무수히 많은 실근을 가지게 되므로 모순이 된다.

따라서 $a=2a+1$에서 $a=-1$이므로 방정식 $f(x)=0$의 실근은 -1뿐이다.

$f(-1)=0$에서 $\quad -1+a-b+4=0,\quad b=a+3$

$f(x)=(x+1)\{x^2+(a-1)x+4\}$

이고, 함수 $f(x)$의 상수항이 4이므로 방정식 $f(x)=0$은 $x=-1$을 삼중근으로 가질 수 없다.

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $(x+1)\{x^2+(a-1)x+4\}=0$은 $x=-1$의 실근 하나와 두 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+(a-1)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-1)^2-4^2<0$

$(a-5)(a+3)<0 \quad \therefore\ -3<a<5$

$f(1)=2a+8$에서 a가 정수이므로 $f(1)$의 최댓값은 $a=4$일 때 16이다.

5. [정답] ③

[해설]

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(a-b)x^2+ax}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left\{\sqrt{(a-b)x^2+ax}-x\right\}\left\{\sqrt{(a-b)x^2+ax}+x\right\}}{\sqrt{(a-b)x^2+ax}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b-1)x^2+ax}{\sqrt{(a-b)x^2+ax}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b-1)x+a}{\sqrt{a-b+\frac{a}{x}}+1}$$

이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b-1)x+a}{\sqrt{a-b+\frac{a}{x}}+1}$가 수렴하려면 $\quad a-b-1=0$

$\therefore\ a-b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b-1)x+a}{\sqrt{a-b+\frac{a}{x}}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{1}+1}$$

이므로 $\frac{a}{2}=c$에서 $\quad a=2c,\ b=2c-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

조건 (나)에서 $x=-t$라 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(ax-b-\sqrt{-(b+1)x^2-4x}\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left\{-at-b-\sqrt{-(b+1)t^2+4t}\right\}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left\{at+b+\sqrt{-(b+1)t^2+4t}\right\}\left\{at+b-\sqrt{-(b+1)t^2+4t}\right\}}{-at-b+\sqrt{-(b+1)t^2+4t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(at+b)^2-\left\{-(b+1)t^2+4t\right\}}{-at-b+\sqrt{-(b+1)t^2+4t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(a^2+b+1)t+2(ab-2)+\frac{b^2}{t}}{-a-\frac{b}{t}+\sqrt{-(b+1)+\frac{4}{t}}}$$

이므로 $\lim_{t\to\infty}\frac{(a^2+b+1)t+2(ab-2)+\frac{b^2}{t}}{-a-\frac{b}{t}+\sqrt{-(b+1)+\frac{4}{t}}}$가 수렴하려면

$a^2+b+1=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$a=0,\ b=-1$ 또는 $a=-1,\ b=-2$

이때 $a=0,\ b=-1$이면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{(a^2+b+1)t+2(ab-2)+\frac{b^2}{t}}{-a-\frac{b}{t}+\sqrt{-(b+1)+\frac{4}{t}}}=-\infty$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ a=-1,\ b=-2,\ c=-\frac{1}{2}\ (\because$ ㉡)

즉 $\lim_{t\to\infty}\frac{(a^2+b+1)t+2(ab-2)+\frac{b^2}{t}}{-a-\frac{b}{t}+\sqrt{-(b+1)+\frac{4}{t}}}=\frac{2(ab-2)}{-a+\sqrt{-(b+1)}}=d$

에서 $\quad d=0$

$$\therefore\ a+b+c+d=(-1)+(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)+0$$

$$=-\frac{7}{2}$$

6. [정답] ③

[해설]

$f(x)$, $g(x)$가 다항함수이면 $f(x)g(x)$도 다항함수이므로 조건 (가)에 의하여

$f(x)g(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=-4$

$x\to0$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to$0이어야 한다.

$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=\lim_{x\to0}(2x^3+ax^2+bx+c)=c=0$

즉, $f(x)g(x)=2x^3+ax^2+bx$이고

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^3+ax^2+bx}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(2x+a+\frac{b}{x}\right)$의 값이 존재하므로 $b=0$이다.

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^3+ax^2}{x^2}=\lim_{x\to0}(2x+a)=a=-4$이므로

$f(x)g(x)=2x^3-4x^2=2x^2(x-2)$

상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(2)$의 값은

$f(x)=2x^2,\ g(x)=x-2$

일 때 최대가 된다.

따라서 구하는 $f(2)$의 최댓값은 $f(x)=2\times2^2=8$

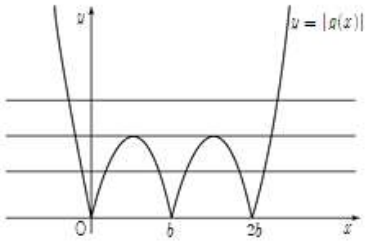
7. [정답] ①

[해설]
$f(x)$는 일차함수이므로 $f(x)=px+q$ $(p\neq 0)$로 놓자.
$a=0$일 때 $x\to 0$이면 (분모) $x\{f(x)-3\}\to 0$이다.
(i) $f(0)=3$, 즉 $q=3$이라 하면 (분모)$=px^2$이므로 극한값이 존재하려면 (분자)$\to 0$, 즉 $f(2)=2p+3=0$이어야 하고 $p=-\frac{3}{2}$이다. 그런데 이때

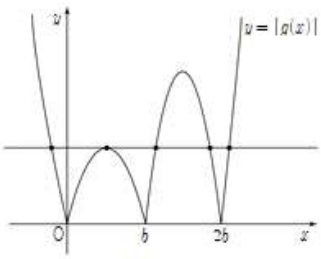
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+2)}{x\{f(x)-3\}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{2}x}{-\frac{3}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

이므로 극한값이 존재하지 않는다. 따라서 $f(0)\neq 3$이다.
(ii) $f(0)\neq 3$이면 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $f(x+2)\to f(2)$가 0이어야 한다. 즉 $f(2)=0$이므로 $f(x)=p(x-2)$이다.
이제 $a=3$일 때 극한값이 존재하지 않아야 한다. $x\to 3$이면 (분자) $f(x+2)\to f(5)=3p\neq 0$이므로, (분모) $x\{f(x)-3\}\to 3\{f(3)-3\}$가 0이 아니면 극한값이 존재하게 된다. 따라서 $f(3)=3$, 즉 $p(3-2)=3$에서 $p=3$이다. (이때 (분자)$\to 9$, (분모)$\to 0$이므로 극한값이 존재하지 않는다.)
따라서 $f(x)=3(x-2)$이고
$f(4)=3\times 2=6$

8. [정답] 219
[출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 함수의 극한 문제 해결하기
[해설]
(i) $k=1$일 때
방정식 $|g(x)|=b$의 서로 다른 실근의 개수는 2, 4, 6이므로
조건 (나)를 만족시키지 않는다.



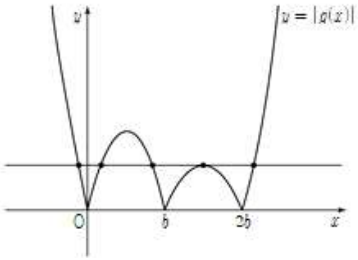
(ii) $k>1$일 때
방정식 $|g(x)|=b$의 서로 다른 실근의 개수는 직선 $y=b$가
함수 $y=|g(x)|$ $(x<b)$의 그래프에 접할 때 5이다.



$\left|g\left(\frac{b}{2}\right)\right|=b$이므로 $-f\left(\frac{b}{2}\right)=b$에서 $ab=4$이다.
a, b는 자연수이므로 가능한 순서쌍 (a, b)는 $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$이고 $b\leq 4$이다.
조건 (가)에서
$g(6)=kf(6-b)=ka(6-b)(6-2b)=-8$
$ka(6-b)(3-b)=-4$ ……㉠
$3-b<0$이므로 만족시키는 자연수 b는 4이다.
그러므로 $a=1$이고 ㉠에서 $k=2$이다.
따라서

$$g(x)=\begin{cases}x(x-4) & (x<4)\\ 2(x-4)(x-8) & (x\geq 4)\end{cases}$$

이다.
(iii) $k<1$일 때
방정식 $|g(x)|=b$의 서로 다른 실근의 개수는 직선 $y=b$가
함수 $y=|g(x)|$ $(x\geq b)$의 그래프에 접할 때 5이다.



$\left|g\left(\frac{3}{2}b\right)\right|=b$이므로
$-kf\left(\frac{3b}{2}-b\right)=b$, $kab=4$
이다. 조건 (가)에서
① $b>6$일 때
$g(6)=f(6)=6a(6-b)=-8$, $3a(b-6)=4$
이다. 이 식의 좌변은 3의 배수이지만 우변은 3의 배수가 아니다. 따라서 만족하는 두 자연수 a, b는
존재하지 않는다.
② $b\leq 6$일 때
$g(6)=kf(6-b)=ka(6-b)(6-2b)=-8$,
$ka(6-b)(3-b)=-4$ ……㉡
이다. 이 식의 좌변에서 $k>0$, $a>0$, $6-b\geq 0$
이므로 $3-b<0$이어야 한다.

가능한 자연수 b는 4 또는 5이다.

$b=4$, 5를 ㉠에 각각 대입하면 $ka=2$이다.

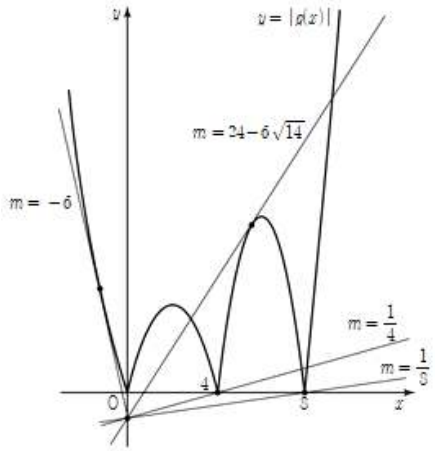
그런데 $kab=4$이므로 $b=2$이다. 이는 모순이다.

따라서 주어진 조건을 만족하는 두 자연수 a, b는 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅲ)으로부터

$$g(x)=\begin{cases}x(x-4) & (x<4)\\ 2(x-4)(x-8) & (x\geq 4)\end{cases}$$

이다.



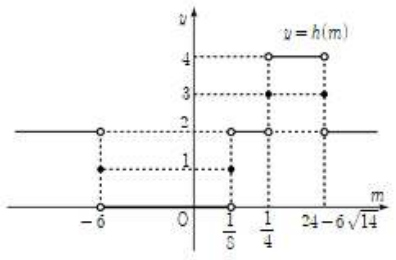
직선 $y=mx-1$이 $(4, 0)$을 지날 때 m의 값을 m_1이라고 하자.

m_1은 직선 $y=mx-1$이 점 $(4, 0)$을 지날 때의 기울기이므로

$m_1=\frac{1}{4}$이다.

이차함수 $y=-2(x-4)(x-8)$의 그래프에 접할 때 m의 값을 m_2라 하자.

m_2는 직선 $y=mx-1$이 함수 $y=-2(x-4)(x-8)$의 그래프에 접할 때이므로 이차방정식 $-2(x-4)(x-8)=mx-1$의 판별식$(D=0)$을 이용하여 구하면 $m_2=24-6\sqrt{14}$이다.



위 그림에서 $\lim_{m\to t-}h(m)+\lim_{m\to t+}h(m)=6$을 만족시키는 모든 실수 t의 값은 $\frac{1}{4}$, $24-6\sqrt{14}$이므로

$\frac{1}{4}+(24-6\sqrt{14})=\frac{97}{4}-6\sqrt{14}$에서

$p=\frac{97}{4}$, $q=-6$이다.

따라서 $12(p+q)=12\left(\frac{97}{4}-6\right)=219$이다.

9. [정답] ②

[해설]

ㄱ. $f(1)=(1-k)^2=1$이고 $k>0$이므로 $k=2$

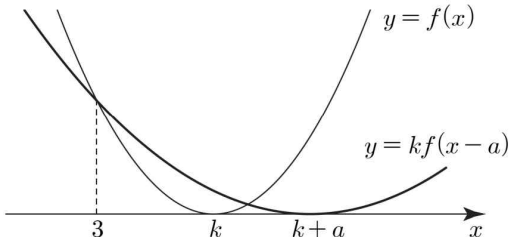
$f(x)=(x-2)^2$

$x\leq 3$에서 $g(x)=f(x)$이므로 $g(2)=0$ (참)

ㄴ. 함수 $g(x)$는 $x=3$을 경계로 두 함수 $f(x)$와 $kf(x-a)$로 정의되므로 이차함수 $f(x)=(x-k)^2$에 대하여 $k>3$, $k=3$, $k<3$인 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $k>3$인 경우 …… ㉠

이차함수 $y=kf(x-a)$의 그래프의 꼭짓점 $(k+a, 0)$은 점 $(k, 0)$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점과 일치하고 $k+a>3$이므로 조건 (가)를 만족시키는 두 이차함수 $y=f(x)$와 $y=kf(x-a)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=k$에 대하여 대칭이고, 이차함수 $y=kf(x-a)$의 그래프는 직선 $x=k+a$에 대하여 대칭이다. $f(3)=kf(3-a)$, $f(k)=kf(k+a-a)=0$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 폭이 이차함수 $y=kf(x-a)$의 그래프의 폭보다 좁다.

두 이차함수 $y=f(x)$와 $y=kf(x-a)$의 이차항의 계수는 각각 1과 k이므로

$k<1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $k=3$인 경우

$$\lim_{x\to 3-}g(x)=\lim_{x\to 3-}f(x)=(3-3)^2=0$$

$$\lim_{x\to 3+}g(x)=\lim_{x\to 3+}\{3f(x-a)\}$$

$$=\lim_{x\to 3+}3(x-a-3)^2=3a^2>0$$

$$\lim_{x\to 3-}g(x)\neq\lim_{x\to 3+}g(x)$$이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $k<3$인 경우는 $k+a$의 값의 범위에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

① $k<3$, $k+a>3$인 경우

$g(k)=f(k)=0$,

$g(k+a)=kf(k+a-a)=kf(k)=0$,

$g(k)=g(k+a)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는

x축과 서로 다른 두 점에서 만나게 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

② $k<3$, $k+a=3$인 경우

$\lim_{x\to3-} g(x)=\lim_{x\to3-} f(x)=(3-k)^2>0$

$\lim_{x\to3+} g(x)=\lim_{x\to3+}\{kf(x-a)\}$

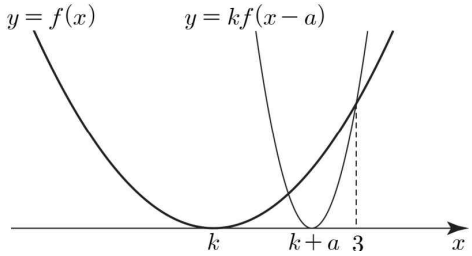
$=\lim_{x\to3+} k(x-a-k)^2$

$=\lim_{x\to3+} k(x-3)^2=0$

$\lim_{x\to3-} g(x)\neq\lim_{x\to3+} g(x)$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

③ $k<3$, $k<k+a<3$인 경우

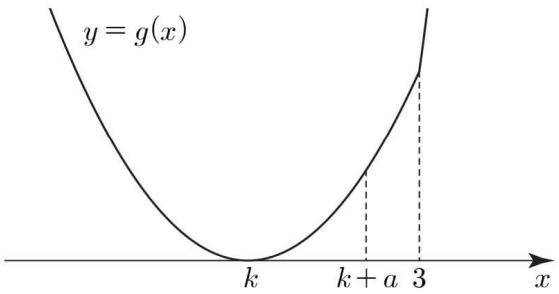
조건 (가), (나)를 만족시키는 두 이차함수 $y=f(x)$와 $y=kf(x-a)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(ⅰ)~(ⅲ)에 의해

$k<3$, $k<k+a<3$이고

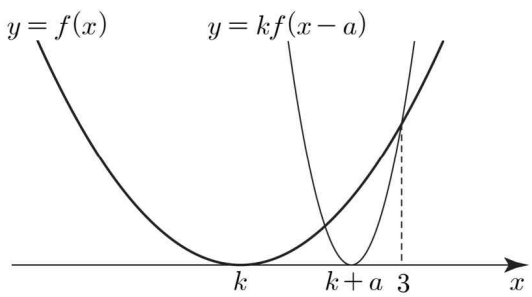
함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 $g(k+a)=f(k+a)<f(3)=g(3)$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의해 $k<3$이고 …… ㉢

두 이차함수 $y=f(x)$와 $y=kf(x-a)$의 그래프의 개혓은 다음과 같다.



이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=k$에 대하여 대칭이고, 이차함수 $y=kf(x-a)$의 그래프는 직선 $x=k+a$에 대하여 대칭이다.

$f(k)=kf(k+a-a)=0$,

$f(3)=kf(3-a)$이므로

이차함수 $y=kf(x-a)$의 그래프의 폭이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 폭보다 좁다. 두 이차함수 $y=f(x)$와 $y=kf(x-a)$의 이차항의 계수는

각각 1과 k이므로

$k>1$ …… ㉣

㉢, ㉣에 의해 $1<k<3$

[반례] $k=\frac{3}{2}$이면,

$\lim_{x\to3-} g(x)=\lim_{x\to3-} f(x)=\left(3-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

$\lim_{x\to3+} g(x)=\lim_{x\to3+}\left\{\frac{3}{2}f(x-a)\right\}$

$=\frac{3}{2}\left(3-a-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-a\right)^2$

$\lim_{x\to3-} g(x)=\lim_{x\to3+} g(x)$이므로

$\frac{9}{4}=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-a\right)^2$

$k<k+a<3$에서 $0<a<\frac{3}{2}$이므로

$a=\frac{3-\sqrt{6}}{2}$

이때 함수

$g(x)=\begin{cases}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 & (x\le3)\\ \frac{3}{2}\left(x-3+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 & (x>3)\end{cases}$은

조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다.

그러나 $(k-1)(k-2)=-\frac{1}{4}<0$ (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

[참고]

$\lim_{x\to3-} g(x)=\lim_{x\to3-}(x-k)^2=(3-k)^2$

$\lim_{x\to3+} g(x)=\lim_{x\to3+}\{kf(x-a)\}=k(3-a-k)^2$

$\lim_{x\to3} g(x)$의 값이 존재하므로

$k(3-a-k)^2=(3-k)^2$

$k<k+a<3$이므로 $k=\left(\frac{3-k}{3-a-k}\right)^2$

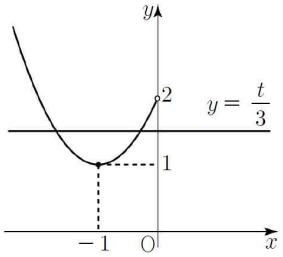
$\sqrt{k}=\frac{3-k}{3-a-k}$이고 $a=3+\sqrt{k}-k-\frac{3}{\sqrt{k}}$

10. [정답] 141

[출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기

(ⅰ) 함수 $y=f(x)$ $(x<0)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{3}$가 만나는

서로 다른 점의 개수를 $r(t)$라 하면



$$r(t)=\begin{cases}0 & (t<3)\\ 1 & (t=3)\\ 2 & (3<t<6)\\ 1 & (t\geq 6)\end{cases}$$

(ii) 함수 $y=|f(-x)-t|$ $(x\geq 0)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{3}$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $s(t)$라 하면

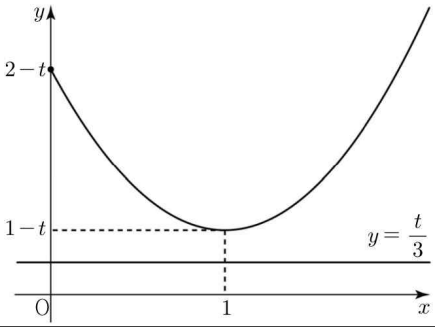
$f(-x)-t=x^2-2x+2-t$

$=(x-1)^2+1-t$

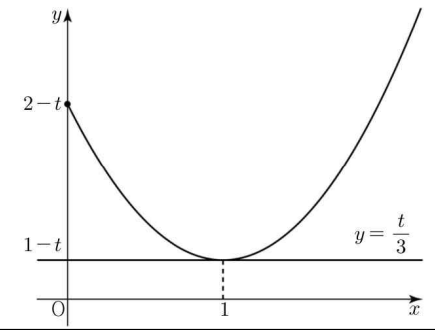
함수 $y=f(-x)-t$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 1-t)$,

y축과 만나는 점의 y좌표는 $2-t$

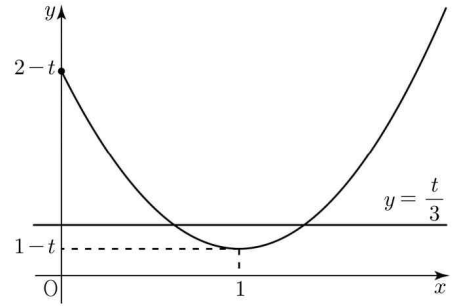
(1) $1-t>\frac{t}{3}\left(t<\frac{3}{4}\right)$일 때, $s(t)=0$

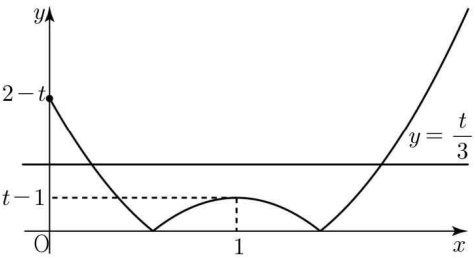


(2) $1-t=\frac{t}{3}\left(t=\frac{3}{4}\right)$일 때, $s(t)=1$

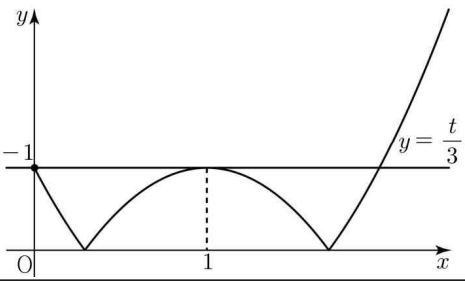


(3) $|1-t|<\frac{t}{3}<2-t\left(\frac{3}{4}<t<\frac{3}{2}\right)$일 때, $s(t)=2$

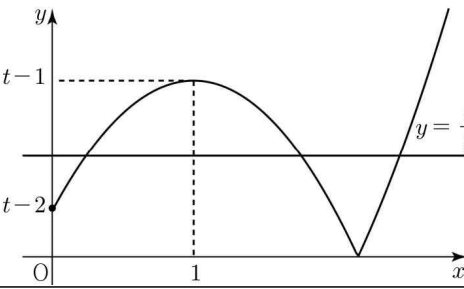




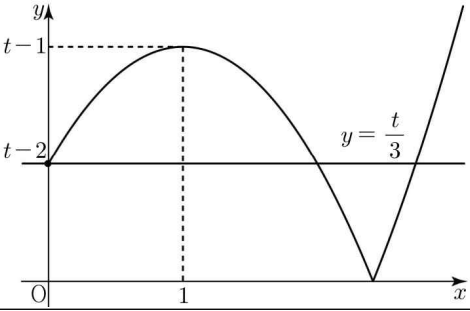
(4) $t-1=\frac{t}{3}=2-t\left(t=\frac{3}{2}\right)$일 때, $s(t)=3$



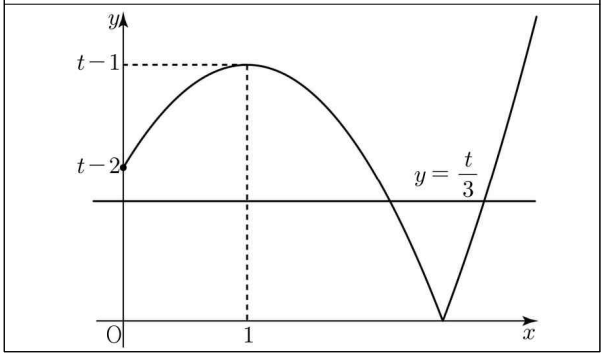
(5) $t-2<\frac{t}{3}<t-1\left(\frac{3}{2}<t<3\right)$일 때, $s(t)=3$



(6) $\frac{t}{3}=t-2\ (t=3)$일 때, $s(t)=3$



(7) $\frac{t}{3} < t-2\ (t>3)$일 때, $s(t)=2$



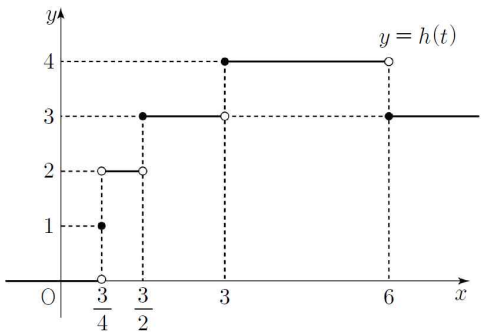
$$s(t)=\begin{cases} 0 & \left(t<\frac{3}{4}\right) \\ 1 & \left(t=\frac{3}{4}\right) \\ 2 & \left(\frac{3}{4}<t<\frac{3}{2}\right) \\ 3 & \left(\frac{3}{2}\le t\le 3\right) \\ 2 & (t>3) \end{cases}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $\frac{t}{3}$가 만나는 서로 다른 점의 개수

$$h(t)=r(t)+s(t)$$

$$h(t)=\begin{cases} 0 & \left(t<\frac{3}{4}\right) \\ 1 & \left(t=\frac{3}{4}\right) \\ 2 & \left(\frac{3}{4}<t<\frac{3}{2}\right) \\ 3 & \left(\frac{3}{2}\le t<3\right) \\ 4 & (3\le t<6) \\ 3 & (t\ge 6) \end{cases}$$



$\lim_{t\to\alpha-}h(t)\neq\lim_{t\to\alpha+}h(t)$인 모든 실수 α를 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$$\alpha_1=\frac{3}{4},\ \alpha_2=\frac{3}{2},\ \alpha_3=3,\ \alpha_4=6$$

이고 $h(\alpha_1)=1,\ h(\alpha_2)=3,\ h(\alpha_3)=4,\ h(\alpha_4)=3$

따라서

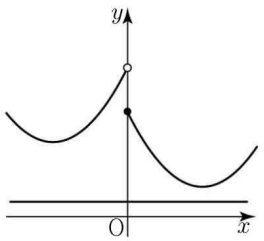
$$\sum_{k=1}^{m}\{4\alpha_k\times h(\alpha_k)\}$$

$$=4\times\left(\frac{3}{4}\times 1+\frac{3}{2}\times 3+3\times 4+6\times 3\right)=141$$

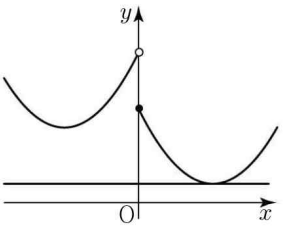
[참고]

실수 t에 대하여 직선 $y=\frac{t}{3}$와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.

(ⅰ) $t<\frac{3}{4}$일 때,

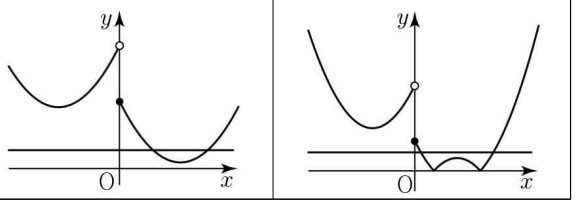


(ⅱ) $t=\frac{3}{4}$일 때,



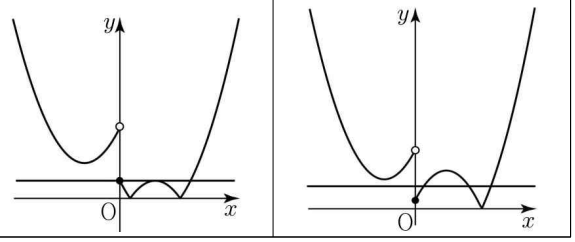
(ⅲ) $\frac{3}{4}<t<\frac{3}{2}$일 때,

$\frac{3}{4}<t\le 1$	$1<t<\frac{3}{2}$



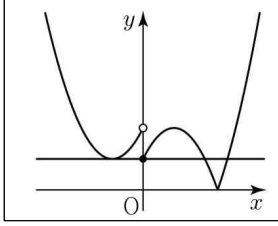
(ⅳ) $\frac{3}{2}\le t<3$일 때,

$t=\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}<t<3$

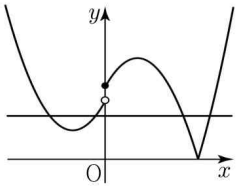


(v) $3 \le t < 6$일 때,

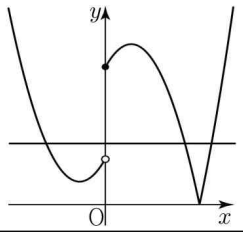
$t=3$



$3<t<6$



(vi) $t \ge 6$일 때,



11. [정답] 4

[해설]

함수 $f(x)$는 $x=2m$을 제외한 모든 실수에서 극한값을 가지므로

$\lim_{x\to 2m-} f(x) \ne \lim_{x\to 2m+} f(x)$ ……㉠

조건 (가)에서 $\alpha = 2m$

$\lim_{x\to 2m} g(x)$의 값이 존재한다고 가정하면

조건 (나)에 의하여

$$\lim_{x\to 2m} f(x) = \lim_{x\to 2m}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)\right\}$$

$$= \lim_{x\to 2m}\frac{f(x)}{g(x)}\times \lim_{x\to 2m} g(x)$$

$\lim_{x\to 2m} f(x)$의 값이 존재하므로

㉠을 만족시키지 않는다.

따라서 $\lim_{x\to 2m} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

조건 (가)에 의하여 $\beta = 2m$

함수 $g(x)$는 $x=m+1$을 제외한 모든 실수에서 극한값을 가지므로 $2m = m+1$, $m=1$

$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}(ax-a) = 0$이고 조건 (나)에서

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 존재하므로

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\{x^2+(a-1)x-a^2+2\}$$

$$= -a^2+a+2 = -(a+1)(a-2) = 0$$

$a=-1$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$인 경우

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2-}\frac{x^2-2x+1}{-x+1} = -1$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2+}\frac{-3x-4}{x+2} = -\frac{5}{2}$$

$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)}{g(x)} \ne \lim_{x\to 2+}\frac{f(x)}{g(x)}$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$인 경우

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2-}\frac{x^2+x-2}{2x-2} = 2$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2+}\frac{-3x+8}{x-1} = 2$$

$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2+}\frac{f(x)}{g(x)}$이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii) 에 의하여 $a=2$, $m=2-1=1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x-2 & (x\le 2) \\ -3x+8 & (x>2) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x-2 & (x\le 2) \\ x-1 & (x>2) \end{cases}$$

따라서 $m+g(a^2) = 1+g(4) = 1+3 = 4$

12. [정답] **28**

[해설]

$$f_1(x) = ax^2+(2b-3)x+a^2-3,$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{3}ax^2+(b+5)x+a^2-1$$

이라 하면

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & (x<k) \\ f_2(x) & (x\ge k) \end{cases}$$

$f(x)>0$이면 $\frac{|f(x)|}{f(x)} = 1$,

$f(x)<0$이면 $\frac{|f(x)|}{f(x)} = -1$

임의의 실수 α에 대하여 $\lim_{x\to\alpha} f(x)$가 존재하므로

(ⅰ) $x_1 < x < x_2$인 모든 x에 대하여 $f(x)\ge 0$일 때

$x_1 < \alpha < x_2$인 임의의 α에 대하여

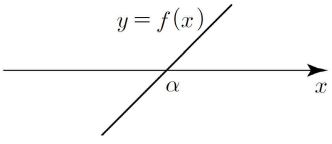
$$\lim_{t\to\alpha+}\frac{|f(t)|}{f(t)} = \lim_{t\to\alpha-}\frac{|f(t)|}{f(t)} = 1,\ g(\alpha) = 0$$

(ⅱ) $x_3 < x < x_4$인 모든 x에 대하여 $f(x)\le 0$일 때

$x_3 < \alpha < x_4$인 임의의 α에 대하여

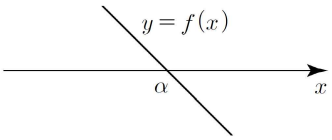
$$\lim_{t\to\alpha+}\frac{|f(t)|}{f(t)} = \lim_{t\to\alpha-}\frac{|f(t)|}{f(t)} = -1,\ g(\alpha) = 0$$

(iii) $f(\alpha)=0$이고 $x=\alpha$의 좌우에서 $f(x)$의 함숫값의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 변하는 경우



$\lim_{t\to a+}\frac{|f(t)|}{f(t)}=1$, $\lim_{t\to a-}\frac{|f(t)|}{f(t)}=-1$이므로 $g(a)=2$

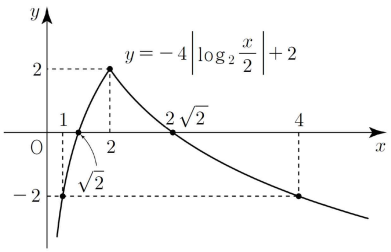
(iv) $f(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f(x)$의 함숫값의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 변하는 경우



$\lim_{t\to a+}\frac{|f(t)|}{f(t)}=-1$, $\lim_{t\to a-}\frac{|f(t)|}{f(t)}=1$이므로 $g(a)=-2$

(ⅰ), (ⅱ), (iii), (iv)에 의하여 함수 $g(x)$의 함숫값이 될 수 있는 것은 -2, 0, 2

함수 $y=-4\left|\log_2\frac{x}{2}\right|+2$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=-4\left|\log_2\frac{x}{2}\right|+2$의 그래프의 교점의 y좌표는 -2, 0, 2만 가능하다.

방정식 $-4\left|\log_2\frac{x}{2}\right|+2=-2$의 해는

$x=1$ 또는 $x=4$

방정식 $-4\left|\log_2\frac{x}{2}\right|+2=0$의 해는

$x=\sqrt{2}$ 또는 $x=2\sqrt{2}$

방정식 $-4\left|\log_2\frac{x}{2}\right|+2=2$의 해는 $x=2$

함수 $g(x)$의 그래프와 함수 $y=-4\left|\log_2\frac{x}{2}\right|+2$의 그래프의 교점의 개수가 5이므로 교점은

$(1,\ -2)$, $(\sqrt{2},\ 0)$, $(2,\ 2)$, $(2\sqrt{2},\ 0)$, $(4,\ -2)$

이고 $g(1)=g(4)=-2$, $g(2)=2$, $f(1)=f(2)=f(4)=0$

$k\le 1$이면 $x\ge k$에서

$f(x)=f_2(x)=-\frac{1}{3}ax^2+(b+5)x+a^2-1$이므로

$f(1)=f(2)=f(4)=0$이 성립하지 않는다.

$k>4$이면 $x<k$에서

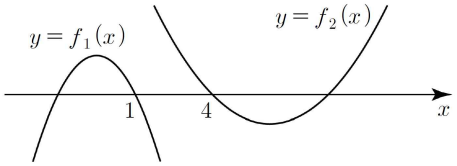
$f(x)=f_1(x)=ax^2+(2b-3)x+a^2-3$이므로

$f(1)=f(2)=f(4)=0$이 성립하지 않는다.

그러므로 $1<k\le 4$이고

$f(1)=f_1(1)$, $f(4)=f_2(4)$ …… ㉠

$a<0$이면 함수 $f_1(x)$의 그래프는 위로 볼록, 함수 $f_2(x)$의 그래프는 아래로 볼록이고 $g(1)=g(4)=-2$, $f_1(1)=f_2(4)=0$을 만족시키는 두 곡선 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$의 개형은 다음과 같다.



이때, $f_1(2)\neq 0$이고 $f_2(2)\neq 0$이므로 $f(2)=0$이 성립하지 않는다.

그러므로 $a>0$

㉠에 의하여

$f(1)=f_1(1)=a+(2b-3)+a^2-3=0$

$f(4)=f_2(4)=-\frac{16}{3}a+(4b+20)+a^2-1=0$

에서 $a=-\frac{31}{3}$ 또는 $a=3$

$a>0$이므로 $a=3$, $b=-3$

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-9x+6 & (x<k)\\ -x^2+2x+8 & (x\ge k)\end{cases}$$

조건 (가)에 의하여

$\lim_{x\to k-}f(x)=\lim_{x\to k+}f(x)$

$\lim_{x\to k-}(3x^2-9x+6)=\lim_{x\to k+}(-x^2+2x+8)$

$4k^2-11k-2=0$, $k=\frac{11\pm 3\sqrt{17}}{8}$

$1<k\le 4$이므로 $k=\frac{11+3\sqrt{17}}{8}$

따라서 $p=\frac{11}{8}$, $q=\frac{3}{8}$이므로 $16(p+q)=16\times\frac{14}{8}=28$

[참고]

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

