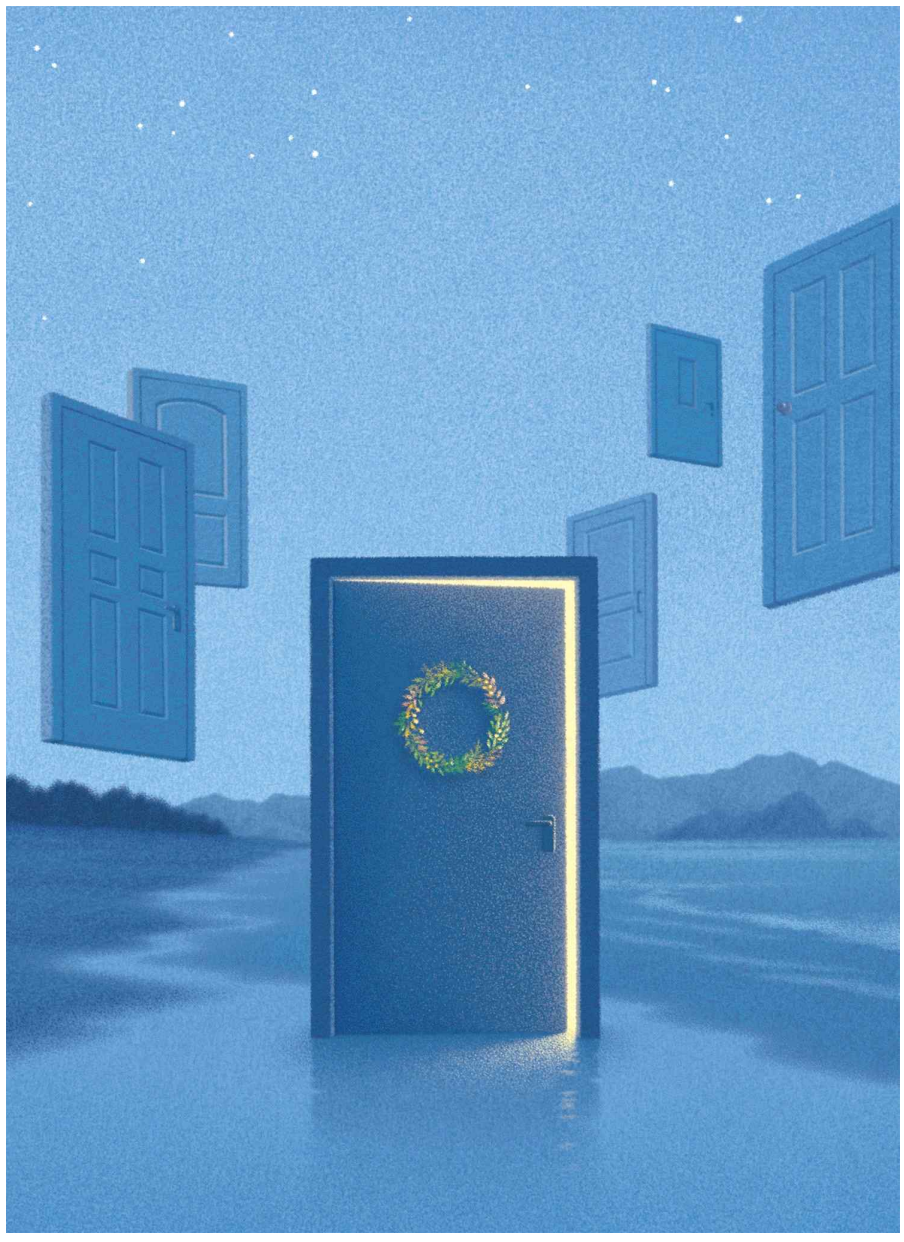
〈 수학적 지형도, The Map of Mathematics 〉

「 공통 수학 Ⅱ 삽화☆ (2026 2학기 기말) 」

(01. 집합 1st)



Door, Jungho Lee

대치동 최고 열정
박지현T

01. 집합 1^{st}

학습 지형도

① 집합과 원소

② 합집합·교집합·여집합·차집합

③ 집합을 원소로 갖는 집합

④ 원소의 합과 곱

⑤ 집합의 연산 법칙

⑥ 부분집합의 개수



＊ 길잡이 문항 | 집합과 원소

【2014년 03월 교육청 (고2) B형 27번】

1. 집합 A_n을

$$A_n = \{x \mid x\text{는 } n\text{의 배수}\} \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이라 하자. $A_n \cap A_2 = A_{2n}$이고 90이 집합 $A_2 - A_n$의 원소가 되도록 하는 90 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점]

현T의 풀이 | 공배수 → 서로소

$A_n \cap A_2$: n과 2의 공배수 집합!
최소공배수가 2n이라는 뜻이므로
n과 2는 서로소 → n은 홀수.

$90 \in A_2 - A_n$에서 $90 \notin A_n$.
즉, n은 90의 약수가 아니어야 한다.

부정은 긍정으로 바꾸어 세고 빼자.
90 이하의 홀수는 45개.
이 중 90의 홀수 약수를 제외하면 된다.
$90 = 2 \times 3^2 \times 5$이므로
홀수 약수는 $45 = 3^2 \times 5$의 약수!
그 개수는 $(2+1)(1+1) = 6$개.

따라서 45-6=39

【2019년 11월 교육청 (고1) 21번】

2. 전체집합 $U = \{x \mid x\text{는 } 20 \text{ 이하의 자연수}\}$의 부분집합

$$A_k = \{x \mid x(y-k) = 30,\ y \in U\}$$

$$B = \left\{x \,\middle|\, \frac{30-x}{5} \in U\right\}$$

에 대하여 $n(A_k \cap B^C) = 1$이 되도록 하는 모든 자연수 k의 개수는?

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

현T의 풀이 | 코드명 '라스트 K'

x도, y도 전체집합 U 안에 있다!
$x(y-k) = 30 \rightarrow y = k + 30/x$.
$k \geq 1$, $y \leq 20$이므로 x=1은 탈락.
$x \leq 20$까지 반영하면 후보는
x=2, 3, 5, 6, 10, 15.

B에서는 30-x가 양의 5의 배수.
$x \in U$이므로 $B = \{5, 10, 15, 20\}$.
$A_k \cap B^C$에 남을 후보는 2, 3, 6.

각 원소가 '마지막으로 남는 k'를 찾자.
x=2 : $y = k + 15 \leq 20 \rightarrow k \leq 5$
x=3 : $y = k + 10 \leq 20 \rightarrow k \leq 10$
x=6 : $y = k + 5 \leq 20 \rightarrow k \leq 15$

$1 \leq k \leq 5$이면 세 원소가 모두 남고,
$6 \leq k \leq 10$이면 3, 6만 남는다.
$11 \leq k \leq 15$일 때 6 하나만 남는다.
$k \geq 16$이면 아무것도 남지 않는다.
따라서 k=11, 12, 13, 14, 15 → 5개, ②

【2017년 03월 교육청 나형 30번】

3. 자연수 전체의 집합의 부분집합 X가 상수 p에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

조건

(가) $n(X)=3$

(나) $x \in X$일 때, x가 홀수이면 $\frac{x+p}{2} \in X$,

x가 짝수이면 $\frac{x}{2} \in X$이다.

$5 \in X$일 때, 모든 자연수 p의 값의 합을 구하시오. [4점]

현T의 풀이 | 5에서 출발하는 순환 고리

조건대로 다음 수를 만드는 함수를 T라 하자.
5→a→b→c를 차례로 따라간다.
a=(5+p)/2이고, p는 홀수여야 한다.
원소는 딱 3개! 새로운 수가
계속 생길 수 없다.
따라서 c는 5, a, b 중 하나이다.
먼저 겹쳤다면 그 뒤도 같은 경로를 반복한다.

a와 b의 홀짝으로 네 갈래를 모두 확인!
① a 홀수, b 홀수
b=(5+3p)/4, c=(5+7p)/8
c=5, a, b를 각각 대입하면
5+7p=40 → p=5
5+7p=20+4p → p=5
5+7p=10+6p → p=5

② a 홀수, b 짝수
b=(5+3p)/4, c=(5+3p)/8
c=5, a, b에서 각각
p=35/3, -15, -5 → 자연수 없음.

길잡이 3 | 경우 나누기 계속

③ a 짝수, b 홀수
b=(5+p)/4, c=(5+5p)/8
c=5, a, b를 각각 대입하면
5+5p=40 → p=7
5+5p=20+4p → p=15
5+5p=10+2p → p=5/3 탈락

④ a 짝수, b 짝수
b=(5+p)/4, c=(5+p)/8
c=5, a, b에서 각각
p=35, -5, -5 → p=35만 남는다.

후보만 구하고 끝내지 말고 실제 집합을 확인!
p=5 : 5→5, 20→10→5
X={5, 10, 20}으로 세 원소를 채운다.
p=7 : 5→6→3→5
X={3, 5, 6}
p=15 : 5↔10, 20→10
X={5, 10, 20}
p=35 : 5→20→10→5
X={5, 10, 20}
각 경우 처음 가정한 홀짝도 모두 맞는다.

따라서 5+7+15+35=62

처음부터 세 수가 모두 다르다고 생각하면
p=5, 15를 놓친다.
'원소를 채울 수 있는가'까지 확인!

집합의 연산

【2020년 11월 교육청 (고1)】

4. 9 이하의 자연수 k에 대하여 집합 A_k를

$$A_k = \{x \mid k-1 \le x \le k+1,\ x\text{는 실수}\}$$

라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{2\}$

ㄴ. 9 이하의 두 자연수 l, m에 대하여 $|l-m| \le 2$이면 두 집합 A_l과 A_m은 서로소가 아니다.

ㄷ. 모든 A_k와 서로소가 아니고 원소가 유한개인 집합 중 원소의 개수가 최소인 집합의 원소의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

현T의 풀이 | 실수 구간을 통째로 보자

$A_k=[k-1, k+1]$인 닫힌구간.
자연수 세 개만 들어 있는 집합이 아니다!

ㄱ. $A_1=[0, 2]$, $A_2=[1, 3]$
$A_3=[2, 4]$이므로 공통부분은 {2}.
→ 참. 끝점 2도 포함된다.

ㄴ. 두 구간의 중심은 1, m, 반지름은 1.
중심 사이 거리 $|1-m|\le 2$이면 겹친다.
같을 때도 한 점에서 만난다. → 참

ㄷ은 ㄱ, ㄴ에서 얻은 정보를 활용하자.
2 하나가 A_1, A_2, A_3을 모두 만나고,
5 하나가 A_4, A_5, A_6을,
8 하나가 A_7, A_8, A_9을 만난다.
따라서 {2, 5, 8}이면 충분하다.
한 점은 길이 2인 구간의 정수 중심을
최대 세 개만 덮으므로 최소한 세 점이 필요.
최솟값은 3이므로 ㄷ은 거짓.

따라서 ㄱ, ㄴ → ③

【2018년 11월 교육청 (고1) 20번】

5. 18 이하의 자연수 k에 대하여 두 집합

$$A=\{x \mid x\text{는 } k\text{의 양의 약수}\},\ B=\{2, 5, 6\}$$

이 있다. $n(A\cap B)=2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $A\cap B=\{2, 5\}$이면 $k=10$이다.

ㄴ. $A\cap B=\{5, 6\}$을 만족하는 k가 존재한다.

ㄷ. 집합 $A-B$의 모든 원소의 합이 홀수가 되는 모든 k의 값의 합은 28이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

현T의 풀이 | 교집합 후보부터 분류

B={2, 5, 6} 중 정확히 두 개가 약수.
① $A\cap B=\{2, 5\}$
k는 10의 배수, $k\le 18$ → k=10.
② $A\cap B=\{2, 6\}$
k는 6의 배수 → k=6, 12, 18.
③ $A\cap B=\{5, 6\}$는 불가능!
6이 약수면 2도 약수이고, $k\ge 30$.
→ ㄱ은 참, ㄴ은 거짓.

ㄷ. 합의 홀짝은 '홀수 약수의 개수'로!
짝수 약수는 합의 홀짝을 바꾸지 않는다.
k=10 : 홀수 약수 1, 5 중 5를 빼면
1개가 남는다 → 합은 홀수.
k=6, 12 : 홀수 약수는 1, 3.
둘 다 남으므로 합은 짝수.
k=18 : 홀수 약수는 1, 3, 9.
세 개가 모두 남으므로 합은 홀수.
따라서 해당하는 k의 합은 10+18=28.
→ ㄷ도 참.

따라서 ㄱ, ㄷ → ③

집합을 원소로 갖는 집합

6. [EBS 올림포스 평가문제집]

집합 $S=\{a, b, c\}$의 부분집합만을 원소로 가지는 집합 X 중 다음 조건을 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오.

조건

(가) $\varnothing \in X$, $S \in X$

(나) $A \in X$, $B \in X$이면 $A \cap B \in X$, $A \cup B \in X$이다.

현T의 풀이 | 연산에 대해 '닫혀 있다'

X의 원소는 수가 아니라 S의 부분집합!
공집합과 S는 반드시 넣고 시작한다.
나머지는 한 원소 집합 세 개와
두 원소 집합 세 개 중에서 고른다.

한 원소 집합 : {a}, {b}, {c}
두 원소 집합 : {a, b}, {a, c}, {b, c}
이들 중 각각 r개, s개를 고르자.

합집합과 교집합을 해도 X 안에 남아야 한다.
예를 들어 {a}, {b}를 넣었다면
합집합인 {a, b}도 반드시 넣는다.
{a, b}, {a, c}를 넣었다면
교집합인 {a}도 반드시 넣는다.

① r=0 : 두 원소 집합은 최대 한 개.
두 개를 고르면 교집합이 한 원소 집합이 된다.
안 고르는 1가지 + 하나 고르는 3가지.
→ 4가지

② r=1 : 한 원소 집합을 고르는 방법 3가지.
예를 들어 {a}를 골랐다고 하자.
s=0 : 1가지, s=1 : 어느 것이든 3가지.
s=2 : {a, b}, {a, c}만 가능 → 1가지.
s=3 : 교집합으로 {b}, {c}도 생겨 불가.
→ 3×(1+3+1)=15가지

길잡이 6 | 빠짐없이, 중복 없이

③ r=2 : 한 원소 집합 두 개를 고른다.
그 방법은 3가지.
예를 들어 {a}, {b}를 골랐다고 하자.
합집합 {a, b}는 반드시 포함해야 한다.
s=1 : {a, b}만 고르는 1가지.
s=2 : {a, c} 또는 {b, c}를 추가 → 2가지.
s=3이면 {a, c}∩{b, c}={c}도 필요!
r=2라는 가정과 맞지 않는다.
→ 3×(1+2)=9가지

④ r=3 : 세 한 원소 집합의 합집합 때문에
세 두 원소 집합도 모두 들어가야 한다.
즉, S의 모든 부분집합을 넣는 1가지.

개수표로 마지막 점검
s의 순서 : 0, 1, 2, 3
r=0 → 1, 3, 0, 0 : 합 4
r=1 → 3, 9, 3, 0 : 합 15
r=2 → 0, 3, 6, 0 : 합 9
r=3 → 0, 0, 0, 1 : 합 1

따라서 4+15+9+1=29가지

그냥 나열하면 누락과 중복을 확인하기 어렵다.
원소 수별로 묶고,
연산이 강제하는 원소를 찾자.

길잡이 문항 | 원소의 합과 곱

〔EBS 올림포스 고난도〕

7. 집합 $A=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 부분집합 중에서 다음 조건을 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오.

○ 조건 ○

(가) $n(X)\geq 2$
(나) 집합 X의 모든 원소의 합은 홀수이다.

현T의 풀이 | 홀수는 홀수 개 고른다

홀수 : 3, 5, 7 → 3개
짝수 : 2, 4, 6, 8 → 4개
원소의 합이 홀수이려면
홀수를 1개 또는 3개 골라야 한다.

① 홀수를 1개 고를 때
고르는 방법은 3가지.
n(X)≥2이므로 짝수를 적어도 하나 골라야 한다.
짝수의 부분집합 2^4개 중 공집합을 제외!
→ $3\times(2^4-1)=45$가지

② 홀수를 3개 모두 고를 때
이미 원소가 세 개라 짝수는 안 골라도 된다.
→ $2^4=16$가지

따라서 $45+16=61$

홀수 하나와 홀수 셋을 고르는 경우는
'짝수를 안 고르기'의 허용 여부가 다르다!

【2020년 11월 교육청 (고1) 30번】

8. 전체집합 $U=\{x\mid x$는 20 이하의 자연수 $\}$의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

○ 조건 ○

(가) $n(A)=n(B)=8$, $n(A\cap B)=1$
(나) 집합 A의 임의의 서로 다른 두 원소의 합은 9의 배수가 아니다.
(다) 집합 B의 임의의 서로 다른 두 원소의 합은 10의 배수가 아니다.

집합 A의 모든 원소의 합을 $S(A)$, 집합 B의 모든 원소의 합을 $S(B)$라 할 때, $S(A)-S(B)$의 최댓값을 구하시오.

현T의 풀이 | 나머지끼리 묶어서 선택

A는 9, B는 10으로 나눈 나머지로 분류.
합이 0인 두 나머지군은 동시에 못 고른다.
A에서는 (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5).
나머지 0인 9, 18도 하나만 고른다.
B에서는 (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6).
나머지 0인 10, 20과 5인 5, 15도 각 하나.

A는 큰 수 쪽, B는 작은 수 쪽을 우선!
$A_0=\{6,\ 10,\ 11,\ 14,\ 15,\ 18,\ 19,\ 20\}$
S(A)≤113, 위 집합에서 113.
$B_0=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 10,\ 11,\ 12\}$
S(B)≥48, 위 집합에서 48.
그런데 공통원소가 10, 11 두 개다!
B_0의 11을 13으로 바꾸면
$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 10,\ 12,\ 13\}$.
$A_0\cap B=\{10\}$, 모든 조건을 만족한다.
→ 113-50=63 달성!

64 이상이 불가능한지도 확인하자.
그렇다면 S(A)≥112, S(B)≤49여야 한다.
위 나머지군에서 여덟 수를 고르면
합 112 이상인 A는 A_0 또는
A_0에서 6→5, 14→13 중 하나만 바꾼 것.
합 49 이하인 B는 B_0 또는 12→13.
모두 10, 11을 포함하므로 조건에 어긋난다.

따라서 최댓값은 63

【2018년 03월 교육청 (고2) 나형 21번】

9. 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

조건

(가) $n(A\cup B)=5$

(나) $n(A-B)=2$

(다) $a\in A$이면 $\frac{a+1}{2}\in B$ 또는 $\frac{a+8}{2}\in B$이다.

집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

① 24 ② 26 ③ 28
④ 30 ⑤ 32

현T의 풀이 | 조건은 한 방향이다

a∈A이면 다음 수가 B에 있어야 한다.
홀수는 (a+1)/2, 짝수는 (a+8)/2.
1→1, 8→8
2→5→3→2, 4→6→7→4

D=A-B, I=A∩B, E=B-A라 두자.
n(D)=2, n(I)+n(E)=3.
D에는 1, 8이 못 들어간다.
세 수의 순환 고리에서도 두 수를 고르면
한 수가 다음 수를 B에 넣게 하므로 모순.
따라서 D는 두 고리에서 하나씩 고른다.
각 고리를 따라가면 E에도 적어도 하나씩 필요.
그렇지 않으면 결국 D의 원소가 B에 들어간다.
→ n(E)=2 또는 3, n(I)=1 또는 0.

최솟값 : 각 고리에서 가장 작은 수를!
S(E)≥2+4=6.
A={1, 3, 7}, B={1, 2, 4}이면 달성.
→ m=6

최댓값 : 각 고리의 최댓값과 남은 한 수!
n(E)=2이면 S(E)≤5+7=12.
n(E)=3이면 S(E)≤5+7+8=20.
A={2, 6}, B={5, 7, 8}이면 달성.
8은 B에만 있어도 된다. 역은 조건이 아니다!
→ M=20

따라서 M+m=26 → ②

【2025년 교육청 고2공통 3월 29번】

10. 전체집합 $U=\{x\mid x$는 15 이하의 자연수$\}$의 부분집합 $P=\{x\mid x$는 15 이하의 소수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 U의 부분집합 X의 개수를 구하시오.

조건

(가) $n(X-P)\times n(X\cup P^C)=11$

(나) 집합 X의 모든 원소의 곱이 M일 때, M의 양의 약수의 개수는 16이다.

현T의 풀이 | 벤다이어그램 → 소인수 지수

P={2, 3, 5, 7, 11, 13}, n(P^C)=9.
n(X-P)≤9이고 두 개수의 곱은 소수 11.
→ n(X-P)=1, n(X∪P^C)=11.
X∪P^C는 비소수 9개와 X 안의 소수들!
즉, 서로 다른 소수 두 개와 비소수 한 개.
비소수 1은 곱의 약수가 4개뿐이므로 탈락.

약수 개수 16 → 가능한 소인수 지수 분해
16, 8×2, 4×4, 4×2×2, 2×2×2×2.
각 소인수의 최대 지수는 4 이하라
지수 15 또는 7은 불가능.
지수 (3, 3)도 비소수가 적어도 $2^2\times3^2=36$.
남는 꼴은 p^3qr 또는 $pqrs$이다.
(여기서 p, q, r, s는 서로 다른 소수.)

① 곱이 p^3qr인 경우
비소수에 제곱인수가 필요 → 4, 8, 9, 12.
4, 9는 세제곱을 만들면 소인수가 두 종류뿐.
비소수가 8이면 소수 두 개는 2를 제외하고
나머지 다섯 소수 중 두 개 → 10가지.
비소수가 $12=2^2\times3$이면 소수 하나는 2.
다른 하나는 5, 7, 11, 13 → 4가지.
p≥5는 $p^2>15$라 불가능.
→ 14가지

② 곱이 서로 다른 네 소수의 곱인 경우
비소수는 6, 10, 14, 15 중 하나.
그 안의 두 소수를 뺀 나머지 네 소수에서
두 개를 고른다 → 각 6가지, 총 4×6=24가지.

따라서 14+24=38

＊ 스스로 이어 가는 스토리라인

단대부고 기출

1. [단대부고]

집합 A_n을 $A_n=\{x|x$는 n의 배수이다.$\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 하자. $A_n\cap A_2=A_{2n}$이고, 60이 집합 A_2-A_n의 원소가 되도록 하는 60 이하의 자연수 n의 개수는?

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

2. [경기고]

집합 A_n을 $A_n=\{x|x$는 n의 배수$\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 하자. $(A_n\cup A_3)\subset A_3$이고 90이 집합 A_3-A_n의 원소가 되도록 하는 90 이하의 자연수 n의 개수는?

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

3. [개포고]

전체집합 $U=\{x \mid x$는 20이하의 자연수$\}$의 부분집합

$A_k=\{x \mid x(y-k)=16,\ y\in U\}$,

$B=\left\{x \mid \dfrac{20-x}{4}\in U\right\}$에 대하여 $n(A_k\cap B^c)=1$이 되도록 하는 모든 자연수 k의 개수는?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

4. [숙명여고]

전체집합 $U=\{x \mid x$는 20 이하의 자연수$\}$의 부분집합

$A_k=\{x \mid x(y-k)=18,\ k\in U,\ y\in U\}$, $B=\left\{x \mid \dfrac{30-x}{6}\in U\right\}$

에 대하여 집합 $A_k\cap B^c$의 모든 원소의 합의 최댓값을 α라 하고, $9\in(A_k\cap B^c)$일 때, k의 최댓값을 β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

*** 주의 변형**

5. [대일외고]

전체집합 $U=\{x \mid x$는 20 이하의 자연수$\}$의 공집합이 아닌 부분집합

$A_k=\{x \mid x(y+k)=42,\ y\in U\}$

에 대하여 $n(A_k)=n(A_{k+1})$이 되게 하는 모든 자연수 k의 개수는?

(단, k는 20이하의 자연수)

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

6. [대일고]

자연수 전체 집합의 부분집합 X가 자연수 p에 대해 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(X)=3$
(나) $x\in X$일 때,
x가 홀수면 $\frac{x+p}{2}\in X$, x가 짝수면 $\frac{x}{2}\in X$이다.

$3\in X$일 때, 조건을 만족하는 p를 모두 구하시오. [10점]

단대부고 기출(19)

7. 3으로 나눈 나머지가 k인 자연수들의 집합을 A_k라고 할 때,

자연수 전체의 집합의 부분집합 X가 상수 p에 대하여 다음 조건을 만족한다.

○ 조건 ○

(가) $n(X)=2$
(나) $x\in X$일 때,
$x\in A_1$이면, $\frac{x+p}{3}\in X$
$x\in A_2$이면, $\frac{x+(p-1)}{3}\in X$
$x\in A_0$이면 $\frac{x+(p-2)}{3}\in X$

$4\in X$일 때, 모든 자연수 p의 값의 합은? [4.9점]

① 33 ② 34 ③ 35
④ 36 ⑤ 37

단대부고 기출(22)

8. 9 이하의 자연수 k에 대하여 집합 A_k를

$$A_k = \{x \mid k-1 \le x \le k+1,\ x\text{는 실수}\}$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

○ 보기 ○

ㄱ. 7이하의 자연수 n에 대하여 $A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} = \{n+1\}$

ㄴ. 9 이하의 두 자연수 l, m에 대하여 $|l-m| \le 1$는 집합 A_l과 A_m이 서로소가 아니기 위한 필요조건이다.

ㄷ. 모든 A_k와 서로소가 아니고 원소가 유한개인 집합 중 원소의 개수가 최소인 집합의 원소의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

* 주의 변형

9. [대원외고]

9 이하의 자연수 k에 대하여 $U = \{x \mid x\text{는 12이하의 자연수}\}$의 부분집합 A_k를

$$A_k = \{x \mid x \le k \text{ 또는 } x \ge k+3\}$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $A_1^c \cap A_2^c = \{3\}$

ㄴ. 모든 A_k^c와 서로소가 아닌 집합 중 원소의 개수가 최소인 집합의 원소의 개수는 5이다.

ㄷ. 9이하의 두 자연수 l, m에 대하여 $|l-m| \ge 2$이면 $n(A_l \cap A_m) = 8$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. [대일외고]

30이하의 자연수 k에 대하여 두 집합
$A=\{x|x$는 k의 양의 약수$\}$, $B=\{2,\ 3,\ 7\}$
이 있다. $n(A\cap B)=2$일 때, 집합 $A-B$의 모든 원소의 합이 짝수가 되는 모든 k값의 합은?

① 18 ② 30 ③ 39
④ 46 ⑤ 67

11. [양재고]

25이하의 자연수 k에 대하여
두 집합 $A_k=\{x\,|\,x$는 k의 양의 약수$\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이 있다.
<보기>에서 옳은 것만을 있는대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $A_k\cap B=\{2,\ 3,\ 4\}$이면 $k=12$이다.
ㄴ. $(A_4\cup A_6)\cap(A_9\cup A_{15})\cap(A_6\cap A_{18})=A_3$
ㄷ. $A_k\cap B=\{2,\ 3,\ 5\}$을 만족시키는 k는 존재하지 않는다.
ㄹ. $n(A_k\cap B)=2$일 때, $n(A_k-B)$가 짝수가 되는 k값의 개수는 5개다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄷ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

* 주의 변형

12. [진선여고]

40 이하의 자연수 k 에 대하여 두 집합
$A=\{x|x$ 는 k 의 양의 약수$\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5\}$ 가 있다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $A\cap B=\{2,\ 3\}$ 일 때, 자연수 k 의 최솟값은 6 이다.
ㄴ. $n(B-A)=1$ 을 만족하는 자연수 k 의 개수는 9 이다.
ㄷ. $n(A-B)+n(B-A)=3$ 을 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합은 41 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2009년 09월 교육청 (고1) 18번]

13. 집합 $S=\{a, b, c\}$의 부분집합을 원소로 갖는 집합 X가 다음 두 조건을 만족한다.

조건

(가) $A \in X$이면 $S-A \in X$
(나) $A \in X$, $B \in X$이면 $A \cup B \in X$

이때 집합 X의 개수는? (단, $X \neq \varnothing$) [4점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

* 주의 변형	현T

14. 집합 $S=\{a, b, c, d\}$의 부분집합을 원소로 갖는 집합 X가 다음 두 조건을 만족한다.

조건

(가) $A \in X$이면 $S-A \in X$
(나) $A \in X$, $B \in X$이면 $A \cup B \in X$

이때 집합 X의 개수를 구하시오. (단, $X \neq \varnothing$) [4점]

15. [숙명여고]

전체집합 $U=\{x \mid x$는 16 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(A)=n(B)=6$, $n(A\cap B)=1$
(나) 집합 A의 임의의 서로 다른 두 원소의 합은 7의 배수가 아니다.
(다) 집합 B의 임의의 서로 다른 두 원소의 합은 8의 배수가 아니다.

집합 A의 모든 원소의 합을 $S(A)$, 집합 B의 모든 원소의 합을 $S(B)$라 할 때, $S(A)-S(B)$의 최댓값을 구하시오.

단대부고 기출(21)

16. 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(A\cup B)=5$
(나) $n(A-B)=2$
(다) $a\in A$이면 $\frac{a+1}{2}\in B$ 또는 $\frac{a+8}{2}\in B$이다.

집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합이 최소일 때, 집합 $A-B$에 속하는 모든 원소의 합의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은?

① 19 ② 20 ③ 21
④ 22 ⑤ 23

*** 주의 변형**

17. [세화고]

전체집합 $U=\{x|x$는 8이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킬 때, 가능한 집합 B의 총 개수는?

(가) $n(A-B)=2$
(나) $n(B)=3$이고 $8 \notin B$ 이다.
(다) $a \in A$이면 $\frac{a+1}{2} \in B$ 또는 $\frac{a+8}{2} \in B$ 이다.

① 9 ② 18 ③ 27
④ 36 ⑤ 45

변형

18. 전체집합 $U=\{x|x$는 18 이하의 자연수$\}$의 부분집합 $P=\{x|x$는 18 이하의 소수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 U의 부분집합 X의 개수를 구하시오. [4점]

조건

(가) $n(X-P)\times n(X\cup P^C)=13$
(나) 집합 X의 모든 원소의 곱이 M일 때, M의 양의 약수의 개수는 12이다.

정답 찾기

1. [정답] 39
2. [정답] ②
3. [정답] 62
4. [정답] ③
5. [정답] ③
6. [정답] 29가지
7. [정답] **61**
8. [정답] **63**
9. [정답] ②
10. [정답] 38

✳ 스스로 이어 가는 스토리라인

1. [정답] ③
2. [정답] ①
3. [정답] ③
4. [정답] 33
5. [정답] ④
6. [정답] 1, 3, 7, 9, 21
7. [정답] ①
8. [정답] ③
9. [정답] ⑤
10. [정답] ③

11. [정답] ⑤
12. [정답] ⑤
13. [정답] ④
14. [정답] 15가지
15. [정답] 45
16. [정답] ③
17. [정답] ③
18. [정답] 78





최고를 위한,
투쟁 같은 공부



선생님 같은 강사
박지현T

정답과 해설
길잡이 문항 01-10 · 스토리라인 01-18

---

1. [정답] 39
집합 $A_n \cap A_2$는 n과 2의 공배수의 집합이다.
$A_n \cap A_2 = A_{2n}$에서 n과 2의 최소공배수는 $2n$이므로 n과 2는 서로소이다.
즉 n은 홀수인 자연수이다.
또한, 90이 집합 $A_2 - A_n$의 원소가 되어야 하므로 90은 A_n의 원소가 될 수 없다.
즉 90은 n의 배수가 아니므로 n은 90의 약수가 아니다.
즉 n은 90 이하의 자연수 중 홀수이면서 90의 약수가 아닌 수이다.
따라서 90의 약수 중 홀수는 1, 3, 5, 9, 15, 45이므로 조건을 만족하는 n의 개수는 $45-6=39$

2. [정답] ②
[출제의도] 집합의 성질을 활용하여 문제해결하기
[해설] 집합 A_k는 전체집합 U의 부분집합이므로
x는 20 이하의 자연수이고 $y-k$는 30의 약수이다.
$y \in U$이므로 $y-k<30$이고 $x \neq 1$
$x \in U$이므로 $x \neq 30$
$y-k$와 x 사이의 관계는 아래 표와 같다.

$y-k$	2	3	5	6	10	15
x	15	10	6	5	3	2

$A_k \subset \{2, 3, 5, 6, 10, 15\}$
$\frac{30-x}{5} \in U$에서 $30-x$는 5의 배수이므로
$B=\{5, 10, 15, 20\}$
$(A_k \cap B^C) \subset \{2, 3, 6\}$
(i) $2 \in (A_k \cap B^C)$일 때
$x=2$, $y-k=15$이고 $y=15+k \leq 20$
$k \leq 5$
(ii) $3 \in (A_k \cap B^C)$일 때
$x=3$, $y-k=10$이고 $y=10+k \leq 20$
$k \leq 10$
(iii) $6 \in (A_k \cap B^C)$일 때
$x=6$, $y-k=5$이고 $y=5+k \leq 20$
$k \leq 15$
(i), (ii), (iii)에 의하여
$k \leq 5$일 때 $A_k \cap B^C = \{2, 3, 6\}$
$5 < k \leq 10$일 때 $A_k \cap B^C = \{3, 6\}$
$10 < k \leq 15$일 때 $A_k \cap B^C = \{6\}$
$n(A_k \cap B^C)=1$이므로 $10 < k \leq 15$
따라서 모든 자연수 k의 개수는 5

3. [정답] 62
조건 (나)에서 $5 \in X$이면 $\frac{5+p}{2} \in X$
(i) $\frac{5+p}{2}$가 홀수인 경우
$\frac{\frac{5+p}{2}+p}{2} = \frac{5+3p}{4} \in X$
㉠ $\frac{5+3p}{4}$가 홀수인 경우:
$((5+3p)/4+p)/2=(5+7p)/8 \in X$이고 조건 (가)에 의하여
$\frac{5+7p}{8} \in \left\{5, \frac{5+p}{2}, \frac{5+3p}{4}\right\}$ ⬅ {5, 홀수, 홀수}
이므로 각 경우 모두 $p=5$
이때 $p=5$이면 $\frac{5+p}{2}=\frac{5+3p}{4}=\frac{5+7p}{8}=5$이므로
X에 속하는 5가 아닌 서로 다른 두 자연수 m, n이
존재하면 (나) 조건을 만족하므로 $\frac{m}{2}=5$이면 $m=10$
또한, $\frac{n}{2}=10$이면 $n=20$
즉, $X=\{5, 10, 20\}$, $p=5$로 두면 조건 (가), (나)를 만족한다.
㉡ $\frac{5+3p}{4}$가 짝수인 경우: $\frac{\frac{5+3p}{4}}{2}=\frac{5+3p}{8} \in X$이고
조건 (가)에 의하여
$\frac{5+3p}{8} \in \left\{5, \frac{5+p}{2}, \frac{5+3p}{4}\right\}$ ⬅ {5, 홀수, 짝수}
이를 만족하는 자연수 p의 값이 존재하지 않는다.
(ii) $\frac{5+p}{2}$가 짝수인 경우
$\frac{\frac{5+p}{2}}{2}=\frac{5+p}{4} \in X$
㉠ $\frac{5+p}{4}$가 홀수인 경우: $\frac{\frac{5+p}{4}+p}{2}=\frac{5+5p}{8} \in X$이고
조건 (가)에 의하여
$\frac{5+5p}{8} \in \left\{5, \frac{5+p}{2}, \frac{5+p}{4}\right\}$ ⬅ {5, 짝수, 홀수}
이므로 각 경우 $p=7$, 15
$p=7$인 경우 $\frac{5+p}{2}=6$(짝수), $\frac{5+p}{4}=3$(홀수)

이므로 주어진 조건을 만족한다.

$p=15$인 경우 $\frac{5+p}{2}=10$(짝수), $\frac{5+p}{4}=5$(홀수)

이므로 주어진 조건을 만족한다.

㉡ $\frac{5+p}{4}$가 짝수인 경우: $\frac{\frac{5+p}{4}}{2}=\frac{5+p}{8}\in$X이고

조건 (가)에 의하여

$\frac{5+p}{8}\in\left\{5,\frac{5+p}{2},\frac{5+p}{4}\right\}$ ⬅ {5, 짝수, 짝수}

이므로 $p=35$

$p=35$인 경우 $\frac{5+p}{2}=20$(짝수), $\frac{5+p}{4}=10$(짝수)

이므로 주어진 조건을 만족한다.

(i), (ii)에서 조건을 만족하는 모든 자연수 p의 값의 합은

$5+7+15+35=62$

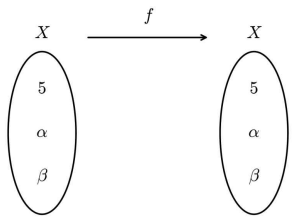
다른 풀이

자연수 전체의 집합의 부분집합 X가

$n(\mathrm{X})=3$이고 $5\in$X이므로

X = {5, α, β}

대응 f : X → X를



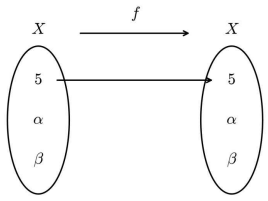
$x\in$X가 홀수이면 $f(x)=\frac{x+p}{2}$

$x\in$X가 짝수이면 $f(x)=\frac{x}{2}$로 정의하면 f는 함수이다.

$\frac{5+p}{2}$가 자연수가 되어야 하므로 p는 홀수이다.

(i) $f(5)=5$, 즉 $p=5$일 때

$f(\alpha)=5$, $f(\alpha)=\alpha$, $f(\alpha)=\beta$인 경우를 각각 생각할 수 있다.



$f(\alpha)=5$일 때,

α가 짝수이면 $\frac{\alpha}{2}=5$, $\alpha=10$

이때 β가 홀수이면 $\beta=15$이고,

β가 짝수이면 $\beta=20$

즉 가능한 경우는 X = {5, 10, 15}, X = {5, 10, 20}

따라서 $p=5$이고 α가 짝수인 경우 가능한 집합 X가 존재하므로 $p=5$일 때, α가 홀수인 경우와 $f(\alpha)=\alpha$, $f(\alpha)=\beta$인 경우는 다루지 않는다.

(ii) $f(5)=\alpha$일 때

$\alpha\neq5$이므로 $p\neq5$

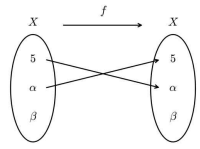
그런데 $p<5$인 홀수인 경우에는 $n(\mathrm{X})=3$인 경우가 존재하지 않음을 쉽게 확인할 수 있다.

즉 $p>5$인 경우만 생각하면 된다.

$5<p$이면 $5<\alpha<p$

이때 가능한 경우로 $f(\alpha)=5$ 또는 $f(\alpha)=\alpha$ 또는 $f(\alpha)=\beta$를 생각해 볼 수 있다.

(ii -1) $f(5)=\alpha$, $f(\alpha)=5$일 때



α가 짝수이면 $\frac{\alpha}{2}=5$, $\alpha=10$이고,

$\frac{5+p}{2}=10$이므로 $p=15$

가능한 β의 값은 $\beta=15$와 $\beta=20$이 있다.

(ii -2) $f(5)=\alpha$, $f(\alpha)=\alpha$일 때

$\alpha\neq5$이면 $p\neq5$이므로 $\frac{\alpha}{2}\neq\alpha$, $\frac{\alpha+p}{2}\neq\alpha$

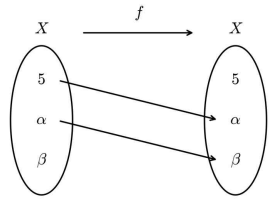
따라서 이 경우는 존재하지 않는다.

(ii -3) $f(5)=\alpha$, $f(\alpha)=\beta$일 때

$f(\beta)=5$ 또는 $f(\beta)=\alpha$ 또는 $f(\beta)=\beta$의 경우를 생각해 볼 수 있다.

(ii -3-a) $f(\beta)=5$일 때,

(ii -3-a-ㄱ) α가 짝수이면



$\frac{\alpha}{2}=\beta$

이때 β가 짝수이면

$\frac{\beta}{2}=5$, $\beta=10$이고, $\alpha=20$

$\frac{5+p}{2}=20$이므로 $p=35$

이때 X = {5, 10, 20}

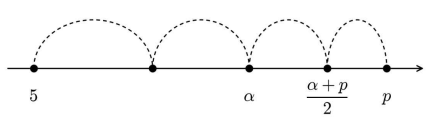
β가 홀수이면

$f(\beta)=f(f(\alpha))=f(f(f(5)))$에서

$\frac{\beta+p}{2}=\frac{\alpha+2p}{4}=\frac{5+5p}{8}=5$이고, $p=7$

이때 X = {3, 5, 6}

(ii -3-a-ㄴ) $p>5$이면 5, α, p, $\frac{\alpha+p}{2}$의 대소 관계는 다음 그림과 같다.



α가 홀수이면 $\frac{\alpha+p}{2}=\beta$

β가 홀수이면 $\alpha<\beta<\frac{\beta+p}{2}<p$

이므로 $n(\mathrm{X})\geq4$가 되어 모순이 생긴다.

β가 짝수이면 $\frac{\beta}{2}=5$

$f(\beta)=\frac{\beta}{2}=5$, 즉 $\beta=10$일 때,

$$\frac{\alpha+p}{2}=\frac{\frac{5+p}{2}+p}{2}=10,\ p=\frac{35}{3}$$

이므로 모순이다.

따라서 가능한 경우가 없다.

(ii-3-b) $f(\beta)=\alpha$일 때,

(ii-3-b-ㄱ) α가 짝수이고 β가 짝수이면

$$f(\beta)=\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha}{4}=\alpha$$이므로

$\alpha=0$이 되어 모순이다.

(ii-3-b-ㄴ) α가 짝수이고 β가 홀수이면

$\alpha=f(\beta)=f(f(f(5)))$이므로

$$\frac{5+p}{2}=\frac{5+5p}{8},\ p=15$$이고

$\beta=5$가 되어 모순이다.

(ii-3-b-ㄷ) α가 홀수이면 β는 짝수이고

이 경우 $\frac{\beta}{2}=\alpha$가 된다.

$$\frac{5+3p}{8}=\frac{5+p}{2},\ p<0$$이 되어 모순이다.

(ii-3-c) $f(\beta)=\beta$일 때,

$\beta<p$이므로 $\frac{\beta}{2}\neq\beta$이고, $\frac{\beta+p}{2}\neq\beta$이므로

$f(\beta)\neq\beta$이다.

따라서 가능한 경우가 없다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 자연수 p의 값의 합은

$5+7+15+35=62$

4. [정답] ③

[출제의도] 집합의 성질을 이용하여 추론하기

ㄱ. $A_1\cap A_2\cap A_3$

$=\{x|0\le x\le 2\}\cap\{x|1\le x\le 3\}\cap\{x|2\le x\le 4\}$

$=\{2\}$ (참)

ㄴ. $|l-m|\le 2$를 만족시키는 9 이하의 자연수 l, m에 대하여 $l\le m$이라 하여도 일반성을 잃지 않는다.

(i) $|l-m|=0$일 때

$m=l$이고 $A_l\cap A_m=A_l\neq\varnothing$

(ii) $|l-m|=1$일 때

$m=l+1$이고

$A_l\cap A_m=A_l\cap A_{l+1}=\{x|l\le x\le l+1\}\neq\varnothing$

(iii) $|l-m|=2$일 때

$m=l+2$이고

$A_l\cap A_m=A_l\cap A_{l+2}=\{l+1\}\neq\varnothing$

(i), (ii), (iii)에 의하여 9 이하의 두 자연수 l, m에 대하여 $|l-m|\le 2$이면 두 집합 A_l과 A_m은 서로소가 아니다. (참)

ㄷ. A_1, A_4, A_7은 서로소이므로 모든 A_k와 만나는 집합 B는 원소가 적어도 세 개이다. $B=\{2, 5, 8\}$로 잡으면 2는 A_1, A_2, A_3, 5는 A_4, A_5, A_6, 8은 A_7, A_8, A_9에 각각 속한다. 따라서 이 B는 모든 A_k와 만나고 원소가 세 개이므로 최솟값은 3이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

5. [정답] ③

[출제의도] 집합의 원소 추론하기

ㄱ. $A\cap B=\{2, 5\}$에서 $2\in A$, $5\in A$

2와 5가 k의 약수이므로 k는 10의 배수이다.

k는 18 이하의 자연수이므로 $k=10$ (참)

ㄴ. $A\cap B=\{5, 6\}$에서 $5\in A$, $6\in A$

5와 6이 k의 약수이므로 k는 30의 배수이다.

k는 18 이하의 자연수이므로 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. (i) $A\cap B=\{2, 5\}$일 때,

$k=10$이고 $A=\{1, 2, 5, 10\}$이므로

집합 $A-B=\{1, 10\}$의 모든 원소의 합은 11

(ii) $A\cap B=\{2, 6\}$일 때, $2\in A$, $6\in A$

2와 6이 k의 약수이므로 k는 6의 배수이다.

k는 18 이하의 자연수이므로

가능한 k는 6, 12, 18이다.

$k=6$인 경우, $A=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

집합 $A-B=\{1, 3\}$의 모든 원소의 합은 4

$k=12$인 경우, $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로

집합 $A-B=\{1, 3, 4, 12\}$의 모든 원소의 합은 20

$k=18$인 경우, $A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$이므로

집합 $A-B=\{1, 3, 9, 18\}$의 모든 원소의 합은 31

∴ 집합 $A-B$의 모든 원소의 합이 홀수가 되는 모든 k의 값의 합은 $10+18=28$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

6. [정답] 29가지

집합 X를 X의 원소 중 집합 S의 세 부분집합 $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$의 개수에

따라 분류하면 다음과 같다.

(i) 원소의 개수가 하나인 집합을 원소로 갖지 않는 경우

$\{\varnothing, S\}$, $\{\varnothing, \{a, b\}, S\}$, $\{\varnothing, \{a, c\}, S\}$,

$\{\varnothing, \{b, c\}, S\}$의 4가지

(ii) 원소의 개수가 하나인 집합 중 한 개를 원소로 갖는 경우

$\{a\}$만을 원소로 갖는 경우를 나열하면

$\{\varnothing, \{a\}, S\}$, $\{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, S\}$, $\{\varnothing, \{a\}, \{a, c\}, S\}$,

$\{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}, S\}$, $\{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, S\}$
$\{b\}$ 또는 $\{c\}$를 원소로 갖는 경우도 나열하면 마찬가지로 각각 5가지이므로 $5\times3=15$이다.

(iii) 원소의 개수가 하나인 집합 중 두 개를 원소로 갖는 경우
$\{a\}$, $\{b\}$를 원소로 갖는 경우를 나열하면
$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, S\}$,
$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, S\}$,
$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, S\}$
$\{a\}$, $\{c\}$를 원소로 갖거나 $\{b\}$, $\{c\}$를 원소로 갖는 경우도 마찬가지로 각각 3가지이므로 $3\times3=9$이다.

(iv) $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$를 원소로 갖는 경우
S의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합 1가지이다.

따라서 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는 29

7. [정답] 61

[풀이전략]

집합의 원소 중 홀수의 개수에 따라 경우를 나누어 집합을 구한다.

[문제풀이]

step 1 집합의 원소 중 홀수의 개수가 1인 집합 X를 구한다.

집합 A의 원소 중 홀수는 3, 5, 7의 3개이다.
모든 원소의 합이 홀수이려면 1개의 홀수를 원소로 갖거나 3개의 홀수를 원소로 가져야 한다.

(i) 1개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합
짝수 2, 4, 6, 8의 4개로 부분집합을 만들고 홀수 3, 5, 7 중에서 하나만 추가한다.
이 중에서 홀수 1개만으로 이루어진 집합은 제외해야 하므로
$3\times(2^4-1)=45$

step 2 집합의 원소 중 홀수의 개수가 3인 집합 X를 구한다.

(ii) 3개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합
짝수 2, 4, 6, 8의 4개로 부분집합을 만들고 홀수 3, 5, 7을 모두 추가한다.
$2^4=16$

(i), (ii)에 의하여 구하는 집합 X의 개수는
$45+16=61$

8. [정답] 63

집합의 원소의 합을 S로 쓰자. 서로 다른 두 원소의 합이 9의 배수일 수 없으므로 A에서는 나머지가 서로 보완되는 두 부류를 함께 선택할 수 없다.
가능한 묶음은 $\{9, 18\}$에서 최대 한 원소, 그리고 다음 네 쌍에서 각각 한쪽이다.
$\{1, 10, 19\}$와 $\{8, 17\}$,
$\{2, 11, 20\}$와 $\{7, 16\}$,
$\{3, 12\}$와 $\{6, 15\}$,
$\{4, 13\}$와 $\{5, 14\}$.
각 쌍에서 한쪽을 정한 뒤 큰 수부터 여덟 개를 선택하여 비교한다. 합의 최댓값은 113이며, 합이 112 이상인 후보는 다음 세 집합뿐이다.
$A_1=\{6, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 20\}$, $S(A_{1)}=113$,
$A_2=\{5, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 20\}$, $S(A_{2)}=112$,
$A_3=\{6, 10, 11, 13, 15, 18, 19, 20\}$, $S(A_{3)}=112$.
B에서도 나머지 0, 5에서는 각각 최대 한 원소를 택하고, 보완쌍 1과 9, 2와 8, 3과 7, 4와 6 중 한쪽만 택한다. 각 선택에서 작은 수부터 여덟 개를 비교하면 최솟값은 48이며, 합이 49 이하인 후보는 다음 둘뿐이다.
$B_1=\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12\}$, $S(B_{1)}=48$,
$B_2=\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 13\}$, $S(B_{2)}=49$.
차가 64 이상이려면 두 합이 (113, 48), (113, 49), (112, 48) 중 하나이어야 한다. 그러나 해당 후보들은 모두 10, 11을 함께 포함하여 교집합이 적어도 두 원소이다. 따라서 조건을 만족하는 차는 63 이하이다.
$A=A_1$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 12, 13\}$은 나머지 조건을 만족하고 교집합이 $\{10\}$이며 차가 $113-50=63$이다. 따라서 최댓값은 63이다.

9. [정답] ②

조건 (다)의 대응을 T라 하자. $T(1)=1$, $T(8)=8$이고 나머지 원소는 $2\to5\to3\to2$, $4\to6\to7\to4$의 두 주기를 이룬다. $D=A-B$, $E=B-A$, $I=A\cap B$라 하자.
D에는 고정점 1, 8이 들어갈 수 없다. 또 같은 세 원소 주기에서 두 원소를 택하면 그중 하나의 상이 다른 D의 원소가 되어 $T(A)\subset B$에 어긋난다. 따라서 D는 각 주기에서 한 원소씩 가진다.
각 D의 원소에서 T를 반복하면 B로 들어간 뒤 다시 D로 돌아오기 전에 E의 원소를 만나야 한다. 따라서 E도 각 주기에서 적어도 하나를 가진다. $n(D)=2$이고 $n(D)+n(E)+n(I)=5$이므로 $2\le n(E)\le3$이다.
그러므로 E의 원소의 합은 최소 $2+4=6$ 이상이다. 원소가 세 개인 경우에도 두 주기를 모두 만나야 하므로 최대는 $5+7+8=20$ 이하이다.
$A=\{1, 3, 7\}$, $B=\{1, 2, 4\}$이면 $E=\{2, 4\}$로 최솟값을 얻는다.
$A=\{2, 6\}$, $B=\{5, 7, 8\}$이면 $E=\{5, 7, 8\}$로 최댓값을 얻는다.
두 배치 모두 원래 조건을 만족하므로 $M+m=20+6=26$이다.

10. [정답] 38

[해설]
집합 U의 부분집합 P는 $P=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
조건 (가)에서 $n(X-P)=1$, $n(X\cup P^C)=11$ 또는 $n(X-P)=11$,

$n(X\cup P^C)=1$이다.
이때, $(X-P)\subset X\subset(X\cup P^C)$이므로
$n(X-P)\le n(X)\le n(X\cup P^C)$이고
$n(X-P)=1$, $n(X\cup P^C)=11$이다.
$n(X-P)=1$이므로 집합 X의 소수가 아닌 원소의 개수는 1이다.
$n(P^C)=n(U)-n(P)=9$이고
$n(X\cup P^C)=n(X)+n(P^C)-n(X\cap P^C)$
$=n(P^C)+\{n(X)-n(X-P)\}$
$=n(P^C)+n(X\cap P)$
이므로 $n(X\cap P)=2$이다. 즉, 집합 X의 소수인 원소의 개수는 2이다.
따라서 집합 X는 15 이하의 서로 다른 소수 p_1, p_2와 소수가 아닌 15 이하의 자연수 k에 대하여 $X=\{p_1, p_2, k\}$로 나타낼 수 있다.
조건 (나)에서 $M=p_1\times p_2\times k$의 양의 약수의 개수가 $16=2^4$이므로, p_1, p_2가 아닌 서로 다른 소수 p_3, p_4에 대하여 $k=p_3\times p_4$ 또는 $k=(p_1)^2\times p_3$ 또는 $k=(p_3)^3$의 꼴이다.

(i) $k=p_3\times p_4$의 꼴인 경우
$k\le 15$이므로 $k=2\times 3$, $k=2\times 5$, $k=2\times 7$, $k=3\times 5$의 4가지 경우가 있다. 각각의 경우마다 k를 제외한 집합 X의 나머지 두 원소를 정하는 경우는 집합 P의 원소 중 k의 소인수가 아닌 4개의 원소 중에서 2개의 원소를 택하는 ${}_4C_2$가지가 있으므로, 구하는 경우의 수는 $4\times {}_4C_2=24$

(ii) $k=(p_1)^2\times p_3$의 꼴인 경우
$k\le 15$이므로 $k=2^2\times 3$의 1가지 경우가 있다. k를 제외한 집합 X의 나머지 두 원소를 정하는 경우는 집합 P의 원소 중 2와 3이 아닌 4개의 원소 중에서 1개의 원소를 택하는 ${}_4C_1$가지이므로 구하는 경우의 수는 $1\times {}_4C_1=4$

(iii) $k=(p_3)^3$의 꼴인 경우
$k\le 15$이므로 $k=2^3$의 1가지 경우가 있다. k를 제외한 집합 X의 나머지 두 원소를 정하는 경우는 집합 P의 원소 중 2가 아닌 5개의 원소 중에서 2개의 원소를 택하는 경우의 수는 $1\times {}_5C_2=10$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 부분집합 X의 개수는
$24+4+10=38$

1. [정답] ③
$A_m\cap A_n=A_{mn}\Leftrightarrow m$, n은 서로소
$\Rightarrow n$은 홀수
$A_2-A_n\ni 60\Rightarrow 60\notin A_n$
$60\in A_1$, $60\in A_3$, $60\in A_5$, $60\in A_{15}$
$\Rightarrow 30-4=26$

2. [정답] ①
1) $(A_n\cup A_3)\subset A_3$이 성립하려면 n은 3의 배수가 되어야 하고, 90 이하의 자연수 중에서 30개가 있다.
2) 90이 집합 A_3-A_n의 원소가 되려면
90이 집합 A_n의 원소가 아니어야 하고,
그와 같으려면 n이 90의 약수가 아니어야 한다.
1), 2)에서 구하는 90 이하의 자연수 n은 3의 배수이면서 90의 약수가 아닌 수들이다. 그런데 $90=2\times 3^2\times 5$에서 90의 약수 중 3의 배수인 수들은 $2\times 2\times 2=8$개이므로 구하는 90 이하의 자연수 n의 개수는 $30-8=22$개다.

3. [정답] ③
$B=\left\{x\,|\,\frac{20-x}{4}\in U\right\}$
x는 20이하의 자연수이므로 $\frac{20-x}{4}$가 자연수가 되는 x의 값은
4, 8, 12, 16
그러므로 집합 B는
$B=\{4, 8, 12, 16\}$
$n(A_k\cap B^c)=n(A_k-B)=1$이므로
집합 A_k의 원소는 집합 B의 원소 4, 8, 12, 16이외의 다른 하나의 원소를 가져야 한다.
$A_1=\left\{x\,|\,x=\frac{16}{y-1},\ y\in U\right\}$에서 20이하의 자연수 x의 값은 16의 약수이므로 $A_1=\{1, 2, 4, 8, 16\}$
$A_2=\left\{x\,|\,x=\frac{16}{y-2},\ y\in U\right\}$에서 20이하의 자연수 x의 값은 16의 약수이므로 $A_2=\{1, 2, 4, 8, 16\}$
⋮
$A_5=\left\{x\,|\,x=\frac{16}{y-5},\ y\in U\right\}$에서 20이하의 자연수 x의 값은 1을 제외한 16의 약수이므로 $A_5=\{2, 4, 8, 16\}$
$A_{12}=\left\{x\,|\,x=\frac{16}{y-12},\ y\in U\right\}$에서 20이하의 자연수 x의 값은 1을 제외한 16의 약수이므로 $A_{12}=\{2, 4, 8, 16\}$
$A_{13}=\left\{x\,|\,x=\frac{16}{y-13},\ y\in U\right\}$에서 20이하의 자연수 x의 값은 1, 2를 제외한 16의 약수이므로 $A_{13}=\{4, 8, 16\}$
따라서 $n(A_k\cap B^c)=1$이 되도록 하는 모든 자연수 k의 개수는 $k=5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$이므로 8개다.

4. [정답] 33
$\frac{30-x}{6}=5-\frac{x}{6}$는 20 이하의 자연수이므로 가능한 20이하의

자연수인 x의 값은 6 또는 12 또는 18

$\therefore\ B=\{6,\ 12,\ 18\}$

$x(y-k)=18$이므로 x는 18의 약수인 1, 2, 3, 6, 9, 18이 될 수 있다.

따라서 $A_k=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$인 집합이 존재할 때 $A_k\cap B^C$의 원소의 합이 최대이다.

$k=1$일 때 $A_1=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$

따라서 $A_k\cap B^c=\{1,\ 2,\ 3,\ 9\}$이고 그때 원소의 합은 15

$\therefore\ \alpha=15$

$9\in A_k$이므로 $9(y-k)=18$, $y=k+2\in U$이므로 $k\le 18$로 k의 최댓값은 18

$\therefore\ \beta=18$

$\therefore\ \alpha+\beta=33$

5. [정답] ④

$A_1=\{x\mid x(y+1)=42,\ y\in U\}=\{2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 14\}$

$A_2=\{x\mid x(y+2)=42,\ y\in U\}=\{2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 14\}$

$A_3=\{x\mid x(y+3)=42,\ y\in U\}=\{2,\ 3,\ 6,\ 7\}$

$A_4=\{x\mid x(y+4)=42,\ y\in U\}=\{2,\ 3,\ 6,\ 7\}$

$A_5=\{x\mid x(y+5)=42,\ y\in U\}=\{2,\ 3,\ 6,\ 7\}$

$A_7=\{x\mid x(y+7)=42,\ y\in U\}=\{2,\ 3\}$

$\vdots$

$A_{13}=\{x\mid x(y+13)=42,\ y\in U\}=\{2,\ 3\}$

$A_{14}=\{x\mid x(y+14)=42,\ y\in U\}=\{2\}$

$\vdots$

$A_{20}=\{x\mid x(y+20)=42,\ y\in U\}=\{2\}$

$\therefore\ n(A_k)=n(A_{k+1})$이 되는 자연수 k의 개수는

1, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19이므로

15개이다.

6. [정답] 1, 3, 7, 9, 21

홀수 x에 대해서는 $T(x)=(x+p)/2$, 짝수 x에 대해서는 $T(x)=x/2$라 하자. $3\in X$이므로 $u=(3+p)/2$도 자연수이고 따라서 p는 홀수이다.

X의 원소가 세 개이므로 3에서 시작한 반복상에 세 원소가 나타난 뒤에는 반드시 앞의 원소 중 하나로 돌아와야 한다. $u=3$이면 $p=3$이고 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$이 가능하다.

$u\neq 3$이고 $T(u)=3$이면 u가 짝수일 때 $u=6$, $p=9$를 얻고 $X=\{3,\ 6,\ 12\}$가 가능하다. u가 홀수인 경우는 $p=3$으로 돌아간다. $T(u)=u$인 경우도 $u=p$와 $u=(3+p)/2$에서 $p=3$이므로 새 경우가 아니다.

이제 $v=T(u)$가 3, u와 다른 세 번째 원소인 경우를 보자. u가 홀수이면 $v=(3+3p)/4$이다. v가 홀수일 때 $T(v)=(3+7p)/8$을 3, u, v와 각각 같게 놓으면 모두 $p=3$으로 귀착된다. v가 짝수일 때 $T(v)=(3+3p)/8$을 비교하면 새로 가능한 양의 자연수는 $p=7$이고 $X=\{3,\ 5,\ 6\}$이다.

u가 짝수이면 $v=(3+p)/4$이다. v가 홀수일 때 $T(v)=(3+5p)/8$을 앞의 세 원소와 비교하면 $p=1$ 또는 이미 얻은 $p=9$이다. $p=1$에서는 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$이 가능하다. v가 짝수이면 $T(v)=(3+p)/8$이고 비교하여 $p=21$을 얻는다. 이때 $X=\{3,\ 6,\ 12\}$이다.

각 후보 집합의 모든 원소에 T를 적용하면 다시 그 집합의 원소가 된다. 따라서 가능한 p는 1, 3, 7, 9, 21이다.

7. [정답] ①

$4\in X$이고 $4\in A_1$이므로, $\dfrac{4+p}{3}\in X$이다.

(ⅰ) $\dfrac{4+p}{3}=4$인 경우

$p=8$

(ⅱ) $\dfrac{4+p}{3}\in A_1$인 경우

$\dfrac{\frac{4+p}{3}+p}{3}=\dfrac{4+p}{3}$

$p=8$

(ⅲ) $\dfrac{4+p}{3}\in A_2$인 경우

$\dfrac{\frac{4+p}{3}+p-1}{3}=4$, $p=\dfrac{35}{4}$는 자연수가 아니다.

$\dfrac{\frac{4+p}{3}+p-1}{3}=\dfrac{4+p}{3}$, $p=11$

(ⅳ) $(4+p)/3\in A_0$인 경우

$\dfrac{\frac{4+p}{3}+p-2}{3}=4$, $p=\dfrac{38}{4}$은 자연수가 아니다.

$\dfrac{\frac{4+p}{3}+p-2}{3}=\dfrac{4+p}{3}$, $p=14$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의해 만족하는 자연수 p는 8, 11, 14이므로

모든 자연수 p의 값의 합은 33이다.

$p=8$일 때 $X=\{3,\ 4\}$로 두면 4는 $(4+8)/3=4$로, 3은 $(3+8-2)/3=3$으로 대응하므로 원소가 두 개라는 조건도 만족한다.

8. [정답] ③

$A_{k=[k-1,\ k}+1]$이다. ㄱ. 세 구간 A_n, A_{n+1}, A_{n+2}에 동시에 속하려면 가장 큰 왼쪽 끝점 $n+1$ 이상이고 가장 작은 오른쪽 끝점 $n+1$ 이하여야 한다. 교집합은 $\{n+1\}$이므로 참이다.
ㄴ. $l=1$, $m=3$이면 $A_1 \cap A_3 = \{2\}$이므로 두 집합은 서로소가 아니다. 그러나 $|l-m|=2>1$이므로 제시된 조건은 필요조건이 아니다. 따라서 거짓이다.
ㄷ. $A_{1=[0,\ 2]}$, $A_{4=[3,\ 5]}$, $A_{7=[6,\ 8]}$은 서로소이므로 이 세 집합을 모두 만나는 집합에는 적어도 세 원소가 필요하다. 한편 $\{2,\ 5,\ 8\}$은 A_1부터 A_9까지 모두와 교집합을 갖는다. 따라서 최소 원소 수는 3으로 참이다. 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

9. [정답] ⑤
ㄱ. $A_k^c = \{k+1,\ k+2\}$이므로 $A_1^c \cap A_2^c = \{3\}$이다.
ㄴ. $A_k^c = \{x \mid k<x<k+3\} = \{x \mid k+1 \le x \le k+2\}$이므로
A_1^c와 A_2^c는 $x=3$에서만 교집합이 존재한다.
A_3^c와 A_4^c는 $x=5$에서만 교집합이 존재한다.
따라서 $x=3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11$이 있으면 모든 A_k^c와 서로소가 아니므로 최소의 원소의 개수는 5이다.
ㄷ. 드모르간의 법칙에 의해
$A_l \cap A_{m=U-(}\{l+1,\ l+2\} \cup \{m+1,\ m+2\})$이다. 조건에 맞는 두 여집합은 서로소이고 각 원소가 두 개이므로 합집합에서 네 원소가 제외된다. 따라서 교집합의 원소는 $12-4=8$개이다.

10. [정답] ③
(i) $A \cap B = \{3,\ 7\}$일 때
$k=21$
$A-B=\{1,\ 21\}$이므로 $1+21=$짝수이므로 $k=21$
(ii) $A \cap B = \{2,\ 7\}$일 때
$k=14$ 또는 28
$A-B=\{1,\ 14\}$ 또는 $\{1,\ 4,\ 14,\ 28\}$에서 모든 원소의 합이 짝수가 아니다.
(iii) $A \cap B = \{2,\ 3\}$일 때
$k=6$ 또는 12 또는 18 또는 24 또는 30
$A-B=\{1,\ 6\}$, $\{1,\ 4,\ 6,\ 12\}$, $\{1,\ 6,\ 9,\ 18\}$, $\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$, $\{1,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}$에서 모든 원소의 합이 짝수가 되는 $k=18$
$\therefore$ k의 합은 $18+21=39$

11. [정답] ⑤

ㄱ. [반례] $k=24$이면 $A_{24}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$이므로 $A_k \cap B = \{2,\ 3,\ 4\}$이 성립한다. (거짓)
ㄴ. $A_4=\{1,\ 2,\ 4\}$, $A_6=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $A_9=\{1,\ 3,\ 9\}$, $A_{15}=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$, $A_{18}=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$이므로 (주어진 식)에 대해서 정리하면
$(A_4 \cup A_6) \cap (A_9 \cup A_{15}) \cap (A_6 \cap A_{18})$
$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\} \cap \{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15\} \cap \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$
$=\{1,\ 3\}=A_3$ (참)
ㄷ. $A_k \cap B=\{2,\ 3,\ 5\}$를 만족시키려면 A_k는 2, 3, 5를 모두 포함해야 하므로 $k=30$이 존재하지만, k는 25이하의 자연수이므로 존재하지 않는다. (참)
ㄹ. $n(A_k \cap B)=2$이고 $n(A_{k-B})$가 짝수인지 $1 \le k \le 25$에서 확인하면 $k=6,\ 8,\ 10,\ 15,\ 18$의 다섯 개이다. (참)
따라서, 옳은 것은, ㄴ, ㄷ, ㄹ

12. [정답] ⑤
ㄱ. $A \cap B=\{2,\ 3\}$ 이므로 k 는 2, 3 의 공배수이고, 5 의 배수는 아니다.
따라서, $k=6,\ 12,\ 18,\ \cdots$
k 의 최솟값은 6 이다. (참)
ㄴ. $n(B-A)=1$ 이므로
(i) k 가 2, 3 의 공배수이고 5 의 배수가 아닐 때,
$k=6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 36$
(ii) k 가 2, 5 의 공배수이고 3 의 배수가 아닐 때,
$k=10,\ 20,\ 40$
(iii) k 가 3, 5 의 공배수이고 2 의 배수가 아닐 때,
$k=15$
(i), (ii), (iii)에서 k 의 개수는 9 개다. (참)
ㄷ. (i) $n(A-B)=0$, $n(B-A)=3$ 일 때,
1 은 모든 수의 약수이므로 $n(A-B)=0$ 인 경우는 존재하지 않는다.
(ii) $n(A-B)=1$, $n(B-A)=2$ 일 때,
$k=2,\ 3,\ 5$
(iii) $n(A-B)=2$, $n(B-A)=1$일 때,
$k=6,\ 10,\ 15$
(iv) $n(A-B)=3$, $n(B-A)=0$ 일 때,
k 의 값은 존재하지 않는다.
따라서 k 값들의 합은
$2+3+5+6+10+15=41$ (참)

13. [정답] ④
집합 X의 원소들이 집합으로 구성되어 있으므로 집합 S의 부분집합을 모두 구하면
$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,\ b\}$, $\{a,\ c\}$, $\{b,\ c\}$, S
즉 집합 X는 $\{\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\},\ S\}$의 조건 (가), (나)를 만족하는 부분집합이다.

만약 $\varnothing \in X$이면 조건 (가)에 의해 $S-\varnothing=S \in X$
따라서 $\varnothing$와 S는 동시에 X의 원소이어야 한다.
즉 $\{S, \varnothing\}$는 $\varnothing \cup \varnothing=\varnothing$, $S \cup \varnothing=S$, $S \cup S=S$로 조건 (나)를 만족하므로 집합 X가 될 수 있다.
이와 같은 방법으로 집합 X에 동시에 있어야 하는 집합을 구하면
$\{a\}$와 $\{b, c\}$, $\{b\}$와 $\{a, c\}$, $\{c\}$와 $\{a, b\}$
따라서 집합 X가 될 수 있는 것은
$\{S, \varnothing\}$, $\{\{a\}, \{b, c\}, S, \varnothing\}$, $\{\{b\}, \{a, c\}, S, \varnothing\}$,
$\{\{c\}, \{a, b\}, S, \varnothing\}$,
$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, S, \varnothing\}$으로 구하는 집합 X의 개수는 5

14. [정답] 15가지

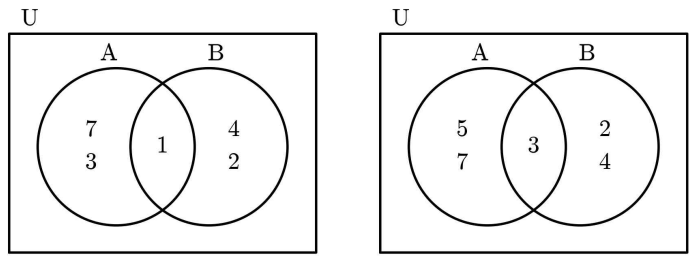
X는 비공집합이므로 $A \in X$를 택할 수 있다. 조건 (가)에 의해 $S-A \in X$이고, 조건 (나)에 의해 $A \cup (S-A)=S \in X$이다. 다시 여집합 조건을 적용하면 $\varnothing \in X$이다. 드모르간 법칙을 이용하면 X는 교집합에 대해서도 닫혀 있다.
X의 비공집합 원소 중 진부분집합인 다른 비공집합 원소를 갖지 않는 집합을 최소 묶음이라 하자. 서로 다른 두 최소 묶음이 공통 원소를 가지면 그 교집합이 더 작은 비공집합 원소가 되므로 모순이다. 따라서 최소 묶음들은 서로소이다.
각 점을 포함하는 X의 모든 원소의 교집합을 취하면 그 점을 포함하는 최소 묶음을 얻는다. 그러므로 최소 묶음들의 합집합은 S이고, X의 모든 원소는 이 묶음들의 합집합이다. 반대로 묶음들의 합집합은 조건 (나)에 의해 모두 X에 속한다.
따라서 가능한 X는 네 원소 집합 S를 비공집합 묶음들로 분할하는 방법과 일대일로 대응한다. 묶음의 크기가 4이면 1가지, 3+1이면 4가지, 2+2이면 순서 중복을 제외하여 $6/2=3$가지, 2+1+1이면 6가지, 1+1+1+1이면 1가지이다. 합계는 15가지이다.

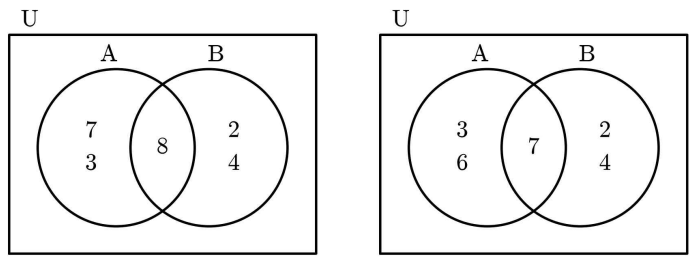
15. [정답] 45

A에서는 나머지 보완쌍 1과 6, 2와 5, 3과 4 중 한쪽만 선택할 수 있고, 나머지가 0인 원소는 최대 하나만 선택할 수 있다.
$U=\{1, 2, \cdots, 16\}$에서 이 제한을 지키며 큰 수 여섯 개를 선택하면 최대는 $A=\{8, 9, 11, 14, 15, 16\}$이고 합은 73이다.
B에서는 나머지가 0, 4인 원소를 각각 최대 하나 선택하고, 보완쌍 1과 7, 2와 6, 3과 5 중 한쪽만 선택한다. 각 경우 작은 수부터 여섯 개를 선택하여 비교하면 유일한 최소 후보는
$B=\{1, 2, 3, 4, 8, 9\}$이고 합은 27이다.
따라서 차는 46 이하이다. 차가 46이려면 위 두 극값 후보를 동시에 택해야 하지만 이들은 8, 9를 함께 포함하므로 교집합이 한 원소라는 조건에 어긋난다. 따라서 차는 45 이하이다.
$A=\{8, 9, 11, 14, 15, 16\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 8, 10\}$은 모든 조건을 만족하고 교집합은 $\{8\}$이다. 차가 $73-28=45$이므로 최댓값은 45이다.

16. [정답] ③

조건 (다)의 대응을 T라 하자. $T(1)=1$, $T(8)=8$이고 나머지 원소는 $2 \to 5 \to 3 \to 2$, $4 \to 6 \to 7 \to 4$의 두 주기를 이룬다. $D=A-B$, $E=B-A$, $I=A \cap B$라 하자.
D에는 고정점 1, 8이 들어갈 수 없다. 또 같은 세 원소 주기에서 두 원소를 택하면 그중 하나의 상이 다른 D의 원소가 되어 $T(A) \subset B$에 어긋난다. 따라서 D는 각 주기에서 한 원소씩 가진다.
각 D의 원소에서 T를 반복하면 B로 들어간 뒤 다시 D로 돌아오기 전에 E의 원소를 만나야 한다. 따라서 E도 각 주기에서 적어도 하나를 가진다. $n(D)=2$이고 $n(D)+n(E)+n(I)=5$이므로 $2 \le n(E) \le 3$이다.
그러므로 E의 원소의 합은 최소 $2+4=6$ 이상이다. 원소가 세 개인 경우에도 두 주기를 모두 만나야 하므로 최대는 $5+7+8=20$ 이하이다.
$A=\{1, 3, 7\}$, $B=\{1, 2, 4\}$이면 $E=\{2, 4\}$로 최솟값을 얻는다.
$A=\{2, 6\}$, $B=\{5, 7, 8\}$이면 $E=\{5, 7, 8\}$로 최댓값을 얻는다.
두 배치 모두 원래 조건을 만족하므로 $M+m=20+6=26$이다.





17. [정답] ③

$U=\{x \mid x$는 8이하의 자연수$\}$이므로 (다)에 따르면

$a=1$일 때 $\dfrac{1+1}{2}=1 \in B$

$a=2$일 때 $\dfrac{2+8}{2}=5 \in B$

$a=3$일 때 $\dfrac{3+1}{2}=2 \in B$

$a=4$일 때 $\dfrac{4+8}{2}=6 \in B$

$a=5$일 때 $\dfrac{5+1}{2}=3 \in B$

$a=6$일 때 $\dfrac{6+8}{2}=7 \in B$

$a=7$일 때 $\frac{7+1}{2}=4\in B$

$a=8$일 때는 (나)에 의해 성립하지 않음.

가능한 B의 개수는 ${}_7C_3=35$

이때 $B=\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{1,\ 2,\ 5\}$, $\{1,\ 3,\ 5\}$, $\{1,\ 4,\ 6\}$, $\{1,\ 4,\ 7\}$, $\{2,\ 3,\ 5\}$, $\{1,\ 6,\ 7\}$, $\{4,\ 6,\ 7\}$일 경우는 $n(A-B)=2$가 성립하지 않는다.

$\therefore 35-8=27$가지

18. [정답] 78

[해설] 집합 U의 부분집합 P는

$P=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$이다.

조건 (가)에서 $n(X-P)=1,\ n(X\cup P^C)=13$

또는 $n(X-P)=13,\ n(X\cup P^C)=1$이다.

이때, $(X-P)\subset X\subset (X\cup P^C)$이므로

$n(X-P)\le n(X)\le n(X\cup P^C)$이고

$n(X-P)=1,\ n(X\cup P^C)=13$이다.

$n(X-P)=1$이므로 집합 X의 소수가 아닌 원소의 개수는 1이다.

$n(P^C)=n(U)-n(P)=11$이고

$$\begin{aligned} n(X\cup P^C)&=n(X)+n(P^C)-n(X\cap P^C)\\ &=n(P^C)+\{n(X)-n(X-P)\}\\ &=n(P^C)+n(X\cap P)\end{aligned}$$

이므로 $n(X\cap P)=2$이다. 즉, 집합 X의 소수인 원소의 개수는 2이다.

따라서 집합 X는 18 이하의 서로 다른 소수 p_1, p_2와 소수가 아닌 18 이하의 자연수 k에 대하여 $X=\{p_1, p_2, k\}$로 나타낼 수 있다.

조건 (나)에서 $M=p_1\times p_2\times k$의 양의 약수의 개수가

$12=6\times 2=4\times 3=2\times 2\times 3$이므로 p_1, p_2가 아닌 소수 p_3에 대하여

$k=(p_1)^4$ 또는 $k=(p_1)^2\times p_2$ 또는 $k=(p_3)^2$ 또는 $k=p_1\times p_3$의 꼴이다.

(ⅰ) $k=(p_1)^4$의 꼴인 경우

$k\le 18$이므로 $k=2^4$의 1가지 경우가 있다. k를 제외한 집합 X의 나머지 두 원소를 정하는 경우는 집합 P의 원소 중 2가 아닌 6개의 원소 중에서 1개의 원소를 택하는 6가지이므로 구하는 경우의 수는 $1\times 6=6$

(ⅱ) $k=(p_1)^2\times p_2$의 꼴인 경우

$k\le 18$이므로 $k=2^2\times 3$, $k=3^2\times 2$의 2가지 경우가 있다. k를 제외한 집합 X의 나머지 두 원소는 2, 3이므로 구하는 경우의 수는 2

(ⅲ) $k=(p_3)^2$의 꼴인 경우

$k\le 18$이므로 $k=2^2$, $k=3^2$의 2가지 경우가 있다. k를 제외한 집합 X의 나머지 두 원소를 정하는 경우는 집합 P의 원소 중 k의 소인수가 아닌 6개의 원소 중에서 2개의 원소를 택하는 ${}_6C_2$가지이므로 구하는 경우의 수는 $2\times {}_6C_2=30$

(ⅳ) $k=p_1\times p_3$의 꼴인 경우

$k\le 18$이므로 $k=2\times 3$, $k=2\times 5$, $k=2\times 7$, $k=3\times 5$의 4가지 경우가 있다. 각각의 경우마다 k를 제외한 집합 X의 나머지 두 원소를 정하는 경우는 k의 2개의 소인수 중 하나를 p_1으로 택하는 2가지와 집합 P의 원소 중 k의 소인수가 아닌 5개의 원소 중에서 1개의 원소를 택하는 5가지가 있으므로 구하는 경우의 수는 $4\times 2\times 5=40$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에서 조건을 만족시키는 부분집합 X의 개수는 $6+2+30+40=78$

[출제의도] 조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 부분집합의 개수를 추론한다.